Aplikovaná matematika (AMA) ZS 2019/2020 kombinované studium

Tereza Šimková
Katedra aplikované matematiky
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
tereza.simkova@tul.cz
(naposledy upraveno 15. ledna 2020)

Základní informace

- udělení zápočtu za docházku
- termíny výuky:
  - sobota 5. 10.
  - čtvrtek 28. 11.
  - pátek 29. 11.
  - sobota 30. 11.
  - pátek 3. 1.
- prezentace bude průběžně doplňována

Plán na 5. 10. 2019

Diferenciální a integrální počet funkcí jedné proměnné (opakování)

- elementární funkce
- derivace
- monotónnost a lokální extrémy funkce
- neurčitý a určitý integrál

Reálná funkce jedné reálné proměnné f na množině $A \subset \mathbb{R}$ je předpis, který každému číslu z množiny A přiřazuje právě jedno reálné číslo.

Množina A se nazývá **definiční obor** funkce a značíme jej D_f.

Obor hodnot funkce f je množina všech $y \in \mathbb{R}$, ke kterým existuje aspoň jedno x z definičního oboru funkce f tak, že platí $y = f(x)$. Obor hodnot značíme H_f.

Graf funkce f je množina všech bodů $[x; y]$, kde $x \in D_f$ a $y = f(x)$.

Příklad 1

Rozhodněte, zda jsou množiny na následujících obrázcích grafem funkcí $y = f(x)$. V kladném případě vyznačte na osy definiční obor a obor hodnot funkce.

1. Lineární funkce

Lineární funkce je každá funkce na množině $\mathbb{R}$ (tj. $D_f = \mathbb{R}$) ve tvaru

$$y = ax + b, \text{ kde } a, b \in \mathbb{R}.$$

- speciálním případem jsou funkce, pro které $a = 0$, tj. $y = b$, kterou nazýváme **konstantní funkce**, a $b = 0$, tj. $y = ax$, kterou nazýváme **přímá úměrnost**.
- grafem každé lineární funkce je přímka
- k sestrojení grafu lineární funkce stačí znát dva jeho různé body

---

Příklad 2

Načrtněte graf funkce f, určete D_f, H_f a průsečíky s osami, je-li:
(a) $f : y = 3$ (b) $f : y = 2x$ (c) $f : y = 2x - 2$ (d) $f : y = -3x + 1$.

Kvadratická funkce je každá funkce na množině $\mathbb{R}$ (tj. $D_f = \mathbb{R}$) ve tvaru

$$y = ax^2 + bx + c, \text{ kde } a \in \mathbb{R} - \{0\}, b, c \in \mathbb{R}.$$

– grafem každé kvadratické funkce je parabola

Příklad 3

Načrtněte graf funkce f, určete D_f, H_f, souřadnice vrcholu a průsečíky s osami, je-li:

(a) $f : y = x^2$ (b) $f : y = -2x^2$ (c) $f : y = (x+1)^2$
(d) $f : y = (x+1)^2 - 3$ (e) $f : y = x^2 + 5x + 6$
(f) $f : y = -x^2 + x - 4$

Mocninná funkce s přirozeným mocnitelem je každá funkce na množině R ve tvaru

$$y = x^n, \text{ kde } n \in \mathbb{N}.$$

– oborem hodnot je v případě, že n je sudé, interval $\langle 0, +\infty)$, v případě, že n je liché, množina reálných čísel

---

Příklad 4

Načrtněte graf funkce f, určete D_f, H_f, souřadnice vrcholu a průsečíky s osami, je-li:

(a) $f: y = x^2$ (b) $f: y = x^3$ (c) $f: y = x^4$.

Mocninná funkce s celým záporným mocnitelem je každá funkce na množině $\mathbb{R} - \{0\}$ ve tvaru

$$y = x^n, \text{ kde } n \in \mathbb{Z}^-.$$

- oborem hodnot je v případě, že n je sudé, interval $(0, +\infty)$, v případě, že n je liché, množina $\mathbb{R} - \{0\}$

Příklad 5

Načrtněte graf funkce f, určete D_f, H_f, souřadnice vrcholu a průsečíky s osami, je-li:
(a) $f : y = x^{-2}$ (b) $f : y = x^{-3}$ (c) $f : y = x^{-4}$.

Exponenciální funkce o základu a je každá funkce na množině $\mathbb{R}$ ve tvaru

$$y = a^x, \text{ kde } a \in (0,1) \cup (1,+\infty).$$

– oborem hodnot je interval $(0,+\infty)$

Příklad 6
Načrtněte graf funkce f, určete D_f, H_f, souřadnice vrcholu a průsečíky s osami, je-li:
(a) $f: y = 2^x$ (b) $f: y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (c) $f: y = 2^x - 1$ (d) $f: y = 2^{x+1}$.

Logaritmická funkce o základu a je inverzní funkce k exponenciální funkci $y = a^x$, kde $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$. Definičním oborem je interval $(0,+\infty)$.

- oborem hodnot je množina reálných čísel

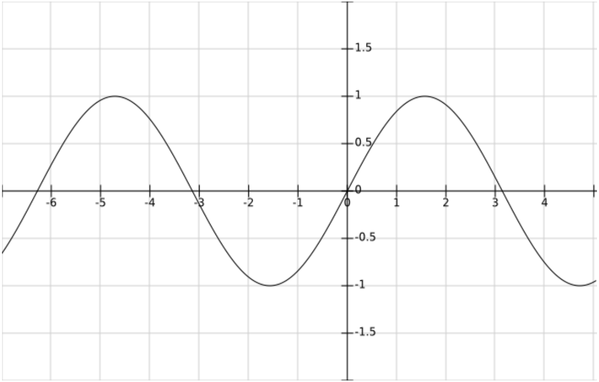
Příklad 7

Načrtněte graf funkce f, určete D_f, H_f, souřadnice vrcholu a průsečíky s osami, je-li:

(a) $f : y = \log_2 x$ (b) $f : y = \log_{\frac{1}{2}} x$ (c) $f : y = \log_{\frac{1}{2}} x + 2$

(d) $f : y = \log_{\frac{1}{2}}(x+3)$.

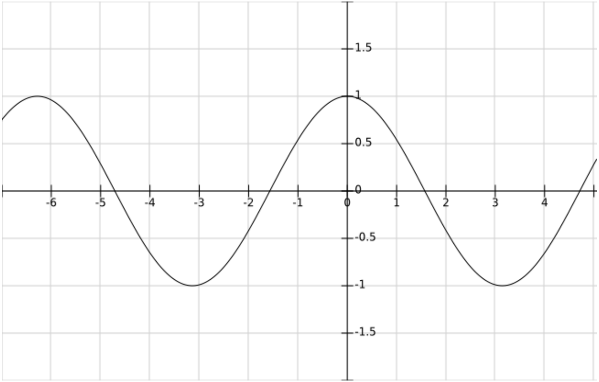
6. Goniometrické funkce



a) Sinus

$f : y = \sin x$

- $D_f = \mathbb{R}$
- $H_f = \langle -1; 1 \rangle$
- perioda 2π

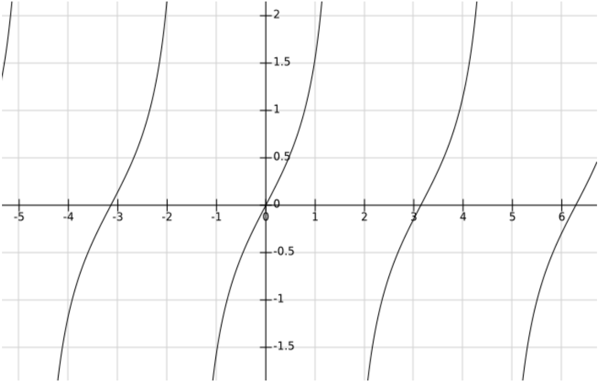


b) Kosinus

$f : y = \cos x$

- $D_f = \mathbb{R}$
- $H_f = \langle -1; 1 \rangle$
- perioda 2π

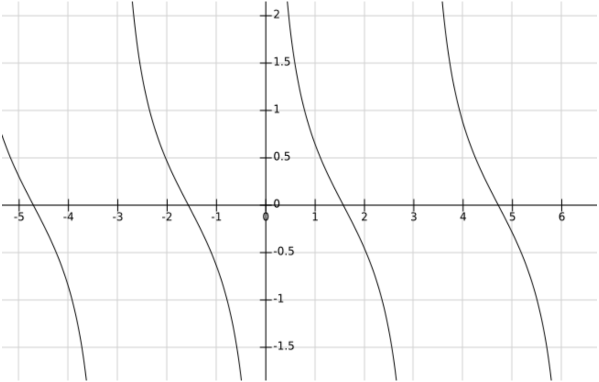
6. Goniometrické funkce



c) Tangens

$f : y = \text{ tg } x$

- $D_f = \mathbb{R} - \{k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\}$
- $H_f = \mathbb{R}$
- perioda π



d) Kotangens

$f : y = \operatorname{cotg} x$

- $D_f = \mathbb{R} - \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$
- $H_f = \mathbb{R}$
- perioda π

Derivace

Mějme funkci f definovanou v jistém okolí bodu x_0. Existuje-li

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

nazýváme ji **derivací funkce** f **v bodě** x_0.

- derivaci funkce f v bodě x_0 značíme $f'(x_0)$ nebo $y'(x_0)$
- interpretace derivace: směrnice tečny, okamžitá rychlost pohybu hmotného bodu

Funkce f má derivaci v intervalu (a, b), jestliže má derivaci v každém bodě $x \in (a, b)$.

DERIVACE ELEMENTÁRNÍCH FUNKCÍ
$(c)' = 0, c \in \mathbb{R}$
$(x^n)' = nx^{n-1}, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$
$(x^k)' = kx^{k-1}, x \in \mathbb{R} - \{0\}, k \in \mathbb{Z}^-$
$(x^r)' = rx^{r-1}, x \in (0; \infty), r \in \mathbb{R}$
$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x, x \in \mathbb{R}$
$(a^x)' = a^x \ln a, x \in R, a \in (0;1) \cup (1;\infty)$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}, x \in (0; \infty)$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, x \in (0;\infty), a \in (0;1) \cup (1;\infty)$
$(\sin x)' = \cos x, x \in \mathbb{R}$
$(\cos x)' = -\sin x, x \in \mathbb{R}$
$(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, x \in \mathbb{R} - \{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$
$(\mathrm{cotg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, x \in \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
$(\arcsin\ x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1;1)$
$(\arccos\ x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1;1)$
$(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$
$(\mathrm{arccotg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$

Derivace součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí

Jestliže funkce $u(x), v(x)$ mají v bodě x_0 derivaci, má v bodě x_0 derivaci i součet, rozdíl a součin funkcí $u(x), v(x)$ a pro $v(x) \neq 0$ i podíl $\frac{u(x)}{v(x)}$ a platí

$$(u \pm v)' = u' \pm v',$$
$$(uv)' = u'v + uv',$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Příklad 8

Vypočtěte derivace následujících funkcí v libovolném bodě definičního oboru.

(a) $y = x^2 + x^3$ (b) $f : y = \sqrt{x} + x^{-2}$ (c) $y = \frac{2}{x} - \frac{1}{7}\sqrt[5]{x^2}$
(d) $y = 2\sin x + 3\cos x$ (e) $y = 6\ln x$ (f) $y = x\sin x$ (g) $\sin x \operatorname{tg} x$
(h) $y = \frac{2x-1}{x+3}$ (i) $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$.

Derivace

Derivace složené funkce

Jestliže funkce $z = g(x)$ má derivaci v bodě x_0 a jestliže funkce $y = f(z)$ má derivaci v bodě $z_0 = g(x_0)$, má složená funkce $y = f(g(x))$ derivaci v bodě x_0 a platí

$$[f(g(x_0))]' = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Příklad 9

Vypočtěte derivace následujících funkcí v libovolném bodě definičního oboru.

(a) $y = (x^2 + 1)^6$ (b) $y = \sqrt{4x^3 - x}$ (c) $y = \cos(2x + 4)$
(d) $y = \sin x^2$.

Derivace a monotónnost funkce

Rostoucí a klesající funkce

Funkce f se nazývá **rostoucí**, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in D_f$ platí: Je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) < f(x_2)$.
Funkce f se nazývá **klesající**, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in D_f$ platí: Je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) > f(x_2)$.

– funkce rostoucí a klesající se souhrnně nazývají **monotónní**

Znaménko derivace a monotónnost funkce

Má-li funkce f v každém bodě intervalu (a, b) kladnou, resp. zápornou derivaci, je v tomto intervalu rostoucí, resp. klesající.

Příklad 10
Určete intervaly monotónnosti následujících funkcí.
(a) $y = x^3 - 3x^2$ (b) $y = -x^2 + 2x + 3$ (c) $y = 2x^3 + 5x^2 + 5x + 3$.

Derivace a extrémy funkce

Lokální extrémy

Funkce f má v bodě x_0 **lokální maximum**, existuje-li takové okolí $U(x_0)$ bodu x_0, že pro všechna x z $U(x_0) \cap D_f$ platí: $f(x) \leq f(x_0)$.
Funkce f má v bodě x_0 **lokální minimum**, existuje-li takové okolí $U(x_0)$ bodu x_0, že pro všechna x z $U(x_0) \cap D_f$ platí: $f(x) \geq f(x_0)$.

Nutná podmínka existence lokálního extrému

Má-li funkce f v bodě x_0 lokální extrém a existuje-li v tomto bodě derivace $f'(x_0)$, pak $f'(x_0) = 0$.

– pozor, obrácená věta neplatí, viz např. $f(x) = x^3$!

Stacionární body

Má-li funkce f v bodě x_0 derivaci a je-li $f'(x_0) = 0$, pak pak bod x_0 nazýváme **stacionárním bodem**.

Derivace a extrémy funkce

– funkce může mít lokální extrém pouze ve stacionárních bodech, nebo v bodech, kde první derivace neexistuje!

Postačující podmínka pro existenci lokálního extrému

Nechť bod x_0 je stacionární bod. Jestliže existuje takové okolí $U(x_0, \delta)$, že v intervalech $(x_0 - \delta, x_0)$ a $(x_0, x_0 + \delta)$ má $f'(x)$ různá znaménka, má funkce f v bodě x_0 ostrý lokální extrém.
Mění-li se znaménko derivace z $+$ na $-$, má funkce f v bodě x_0 lokální maximum.
Mění-li se znaménko derivace z $-$ na $+$, má funkce f v bodě x_0 lokální minimum.

Příklad 11
Určete lokální extrémy následujících funkcí.
(a) $y = x^3 - 3x^2$ (b) $y = -x^2 + 2x + 3$ (c) $y = 2x^3 + 5x^2 + 5x + 3$.

Postačující podmínka pro existenci lokálního extrému

Nechť bod x_0 je stacionární bod a nechť existuje v bodě x_0 druhá derivace.
Je-li $f''(x_0) < 0$, má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum.
Je-li $f''(x_0) > 0$, má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum.

Poznámka: Je-li $f''(x_0) = 0$, nelze o existenci lokálního extrému rozhodnout!

Příklad 12

Určete lokální extrémy následujících funkcí pomocí druhé derivace.
(a) $y = x^3 - 3x^2$ (b) $y = -x^2 + 2x + 3$ (c) $y = 2x^3 + 5x^2 + 5x + 3$.

Neurčitý integrál

– pojem integrování je inverzní k pojmu derivování: je dána funkce $f(x)$ a hledáme funkci $F(x)$ tak, aby $f(x)$ byla její derivací, tj. $F'(x) = f(x)$
  např. $f(x) = x^2 - 1, F(x) = \frac{x^3}{3} - x$
  $f(x) = x^2 - 1, F(x) = \frac{x^3}{3} - x - 2$
  $f(x) = x^2 - 1, F(x) = \frac{x^3}{3} - x + 0,5$

Primitivní funkce

Řekneme, že funkce $F(x)$ je v intervalu (a, b) **primitivní funkcí** k funkci $f(x)$, jestliže platí $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b)$.

Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu (a, b). Potom k ní na intervalu (a, b) vždy existuje primitivní funkce.

Poznámka: Těchto primitivních funkcí je nekonečně mnoho - liší se o integrační konstantu.

Neurčitý integrál

Neurčitý integrál

Množina všech primitivních funkcí k funkci $f(x)$ se nazývá **neurčitý integrál**. Značíme jej $\int f(x)\,dx$.

– je-li $F(x)$ primitivní funkce k funkci $f(x)$, obyčejně píšeme $\int f(x)\,dx = F(x) + C,\ C \in \mathbb{R}$

Existují-li v intervalu (a, b) primitivní funkce k funkcím $f_1(x), f_2(x)$ a jsou-li c_1, c_2 libovolné konstanty, potom existuje primitivní funkce k funkci $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ a platí

$$\int [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)]\,dx = c_1 \int f_1(x)\,dx + c_2 \int f_2(x)\,dx.$$

Z toho vyplývají následující vztahy

$$\int [cf(x)]\,dx = c \int f(x)\,dx \quad \text{a} \quad \int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$$

Neurčitý integrál

ZÁKLADNÍ VZORCE PRO PRIMITIVNÍ FUNKCE
$\int 0dx = C, x \in \mathbb{R}$
$\int dx = x + C, x \in \mathbb{R}$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, x \in (0, \infty), n \in \mathbb{R} - \{-1\}$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln \lvert x \rvert + C, x \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$
$\int e^x dx = e^x + C, x \in \mathbb{R}$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, x \in \mathbb{R}, a \in (0; 1) \cup (1; \infty)$
$\int \sin x dx = -\cos x + C, x \in \mathbb{R}$
$\int \cos x dx = \sin x + C, x \in \mathbb{R}$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \mathrm{tg} x + C, x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi), k \in \mathbb{Z}$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\mathrm{cotg} x + C, x \in (k\pi; \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z}$

Příklad 13

Vypočtěte:

(a) $\int (x^3 + x^2 - 2x)\mathrm{d}x$ (b) $\int \left(\frac{x^3}{4} - \frac{3}{x^4}\right) \mathrm{d}x$ (c) $\int (\cos x - \sin x)\mathrm{d}x$.

Metoda per partes

Nechť spojité funkce $u(x), v(x)$ mají spojité derivace na intervalu (a, b), pak v (a, b) platí

$$\int u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,dx \qquad \forall x \in (a, b).$$

Příklad 14

Vypočtěte:
(a) $\int x \sin x \mathrm{d}x$ (b) $\int \mathrm{e}^x \cos x \mathrm{d}x$ (c) $\int x \ln x \mathrm{d}x$.

Věta o substituci

Nechť funkce $F(t)$ je primitivní funkcí k funkci $f(t)$ v intervalu (α, β). Nechť funkce $t = g(x)$ má derivaci $g'(x)$ v intervalu (a, b). Pro každé $x \in (a, b)$ nechť hodnota $g(x)$ patří do intervalu (α, β). Pak v intervalu (a, b) je funkce $F(g(x))$ primitivní funkcí k funkci $f(g(x)) \cdot g'(x)$, tj.

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = \int f(t)\, dt = F(t) + C,$$

kde $t = g(x)$.

Příklad 15

Vypočtěte:

(a) $\int \frac{x}{1+x^2} \mathrm{d}x$ (b) $\int \sin x \cos x \mathrm{d}x$ (c) $\int \cos 4x \mathrm{d}x$.

Určitý integrál

Určitý integrál

Nechť F je primitivní funkce k funkci f na intervalu I. Rozdíl funkčních hodnot $F(b) - F(a)$ funkce F v libovolných bodech a, b tohoto intervalu se nazývá **určitý integrál funkce** f **v mezích od** a **do** b a značí se $\int\limits_a^b f(x)dx$.

– geometrická interpretace určitého integrálu: je-li $a < b$ a f je nezáporná spojitá funkce na $\langle a, b\rangle$, pak $\int\limits_a^b f(x)dx$ udává obsah rovinného útvaru ohraničeného grafem funkce f a přímkami $x = a, x = b, y = 0$

Určitý integrál

Nechť $f_1(x), f_2(x)$ jsou spojité funkce na intervalu I, a, b nechť jsou libovolné body z intervalu I a c_1, c_2 libovolné reálné konstanty. Potom platí

$$\int_a^b [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)]\, dx = c_1 \int_a^b f_1(x)\, dx + c_2 \int_a^b f_2(x)\, dx.$$

Z toho vyplývají následující vztahy

$$\int_a^b [cf(x)]\, dx = c \int_a^b f(x)\, dx$$

a

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)\, dx.$$

Určitý integrál

Je-li f spojitá a nezáporná funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

Jsou-li f, g funkce spojité v intervalu $\langle a, b\rangle$ a je-li $f(x) \geq g(x) \forall x \in \langle a, b\rangle$, pak

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Určitý integrál

Při záměně mezí určitého integrálu se změní znaménko:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Je-li funkce f spojitá v intervalu I, který obsahuje body a, b, c tak, že $a < c < b$, pak platí:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Příklad 16

Vypočtěte:

(a) $\int_2^6 (x^3 + x^2 - 2x) \mathrm{d}x$ (b) $\int_{1/2}^1 \left(\frac{x^3}{4} - \frac{3}{x^4} \right) \mathrm{d}x$ (c) $\int_0^\pi (\cos x - \sin x) \mathrm{d}x$.

Metoda substituce v určitém integrálu

Jsou-li funkce $t = g(x)$ a její derivace $g'(x)$ spojité v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a je-li zároveň spojitá i funkce $f(t)$ pro všechna $t = g(x)$, kde $x \in \langle a, b\rangle$, pak platí

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt.$$

Příklad 17

Vypočtěte:

(a) $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ (b) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin x \cos x \mathrm{d}x$ (c) $\int_{\pi/16}^{\pi/2} \cos 4x \mathrm{d}x$.

Metoda per partes v určitém integrálu

Jsou-li $u = u(x), v = v(x)$ funkce mající v intervalu $\langle a, b \rangle$ spojité derivace, pak platí

$$\int_a^b uv'dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'v dx.$$

Příklad 18

Vypočtěte:

(a) $\int_{\pi}^{3\pi/2} x \sin x dx$ (b) $\int_0^{\pi/6} \mathrm{e}^x \cos x dx$ (c) $\int_1^e x \ln x dx$.

Plán na 28. 11. 2019

Diferenciální počet funkcí více proměnných

- funkce více proměnných
- limita a spojitost
- směrová a parciální derivace, gradient
- lokální/globální/vázané extrémy

Reálná funkce n reálných proměnných

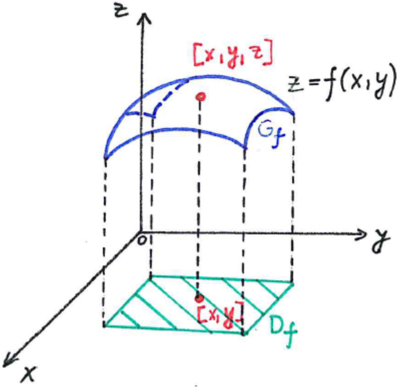
Reálná funkce n reálných proměnných f na množině $A \subset \mathbb{R}^n$ je předpis, který každému vektoru $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ přiřadí právě jedno reálné číslo $f(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$.

Množina A se nazývá **definiční obor funkce** f a značíme jej D_f.

Množina $H_f = \{y \in \mathbb{R}; \exists \boldsymbol{x} \in D_f : f(\boldsymbol{x}) = y\}$ se nazývá **obor hodnot funkce** f.

Množina $G_f = \{[x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)] \in \mathbb{R}^{n+1}; [x_1, \dots, x_n] \in D_f\}$ se nazývá **graf funkce** f.

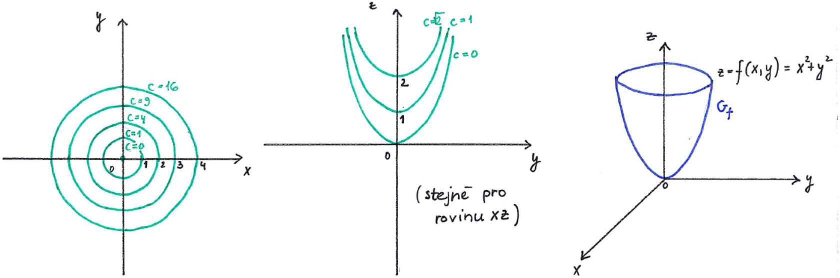
Prvky $\boldsymbol{x} = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n$ se nazývají **body n-rozměrného prostoru** $\mathbb{R}^n$.



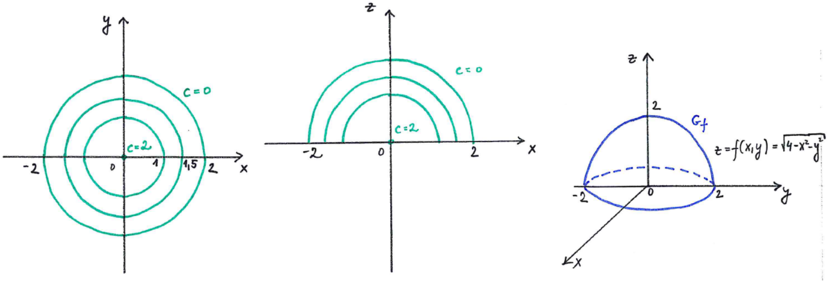
Obrázek 1: Graf funkce $z = f(x, y)$

Příklad 19

Určete definiční obor a obor hodnot funkce f a nakreslete její graf, je-li:
(a) $f(x, y) = x^2 + y^2$ (b) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.



Obrázek 2: Graf funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ metodou řezů

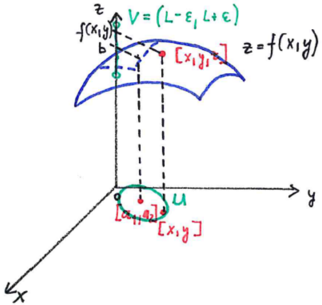


Obrázek 3: Graf funkce $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ metodou řezů

Limita funkce n proměnných

Funkce n **proměnných** f **má v bodě** $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ **limitu** L, jestliže ke každému okolí V bodu L existuje okolí U bodu $\boldsymbol{a}$ tak, že pro všechny body $\boldsymbol{x} \in U, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{a}$, je $f(\boldsymbol{x}) \in V$.
Značíme

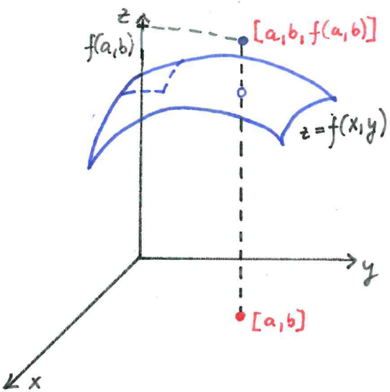
$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = L.$$



Obrázek 4: Limita funkce $z = f(x, y)$

Spojitost funkce n proměnných

Funkce n **proměnných** f **je spojitá v bodě** $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, jestliže ke každému okolí V bodu $f(\boldsymbol{a})$ existuje okolí U bodu $\boldsymbol{a}$ tak, že pro všechny body $\boldsymbol{x} \in U$ je $f(\boldsymbol{x}) \in V$.



Obrázek 5: Příklad nespojité funkce dvou proměnných

Spojitost funkce n proměnných

- funkce f může být spojitá v bodě $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, jen pokud je $\boldsymbol{a} \in D_f$
- je-li $\boldsymbol{a} \in D_f$, pak je f spojitá v bodě $\boldsymbol{a}$ právě tehdy, když

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a})$$

Funkce n proměnných f je v bodě $\boldsymbol{a}$ spojitá vzhledem k množině M, jestliže ke každému okolí V bodu $f(\boldsymbol{a})$ existuje okolí U bodu $\boldsymbol{a}$ tak, že pro každý bod $\boldsymbol{x} \in U \cap M$ je $f(\boldsymbol{x}) \in V$.

Funkce n proměnných f je spojitá na množině M, jestliže je spojitá v každém bodu $\boldsymbol{x} \in M$ vzhledem k M.

Spojitost funkce n proměnných

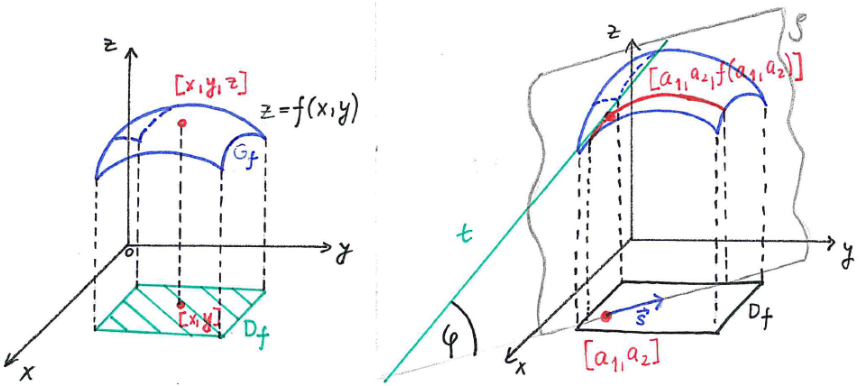
Weierstrassova věta

Je-li funkce n proměnných f je spojitá na neprázdné omezené uzavřené množině $M \subset \mathbb{R}^n$, pak existují body $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d} \in M$ takové, že pro každý bod $\boldsymbol{x} \in M$ platí

$$f(\boldsymbol{c}) \leq f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{d}).$$

– věta říká, že za uvedených předpokladů nabývá funkce v nějakých bodech této množiny své nejmenší a největší hodnoty

Směrová derivace



Obrázek 6: Směrová derivace funkce $f(x, y)$ v bodě $\boldsymbol{a}$ ve směru vektoru $\vec{s}$

Směrová derivace

Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je reálná funkce n reálných proměnných s definičním oborem D_f, $\boldsymbol{a} = [a_1, \dots, a_n] \in D_f$ a $\vec{s}$ je n-rozměrný vektor. **Směrovou derivací funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$ ve směru vektoru $\vec{s}$** nazýváme limitu

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + h\vec{s}) - f(\boldsymbol{a})}{h}.$$

- značíme $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(\boldsymbol{a})$ nebo $f'_{\vec{s}}(\boldsymbol{a})$
- $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(\boldsymbol{a})$ popisuje, jak rychle se mění závisle proměnná s pohybem bodu $\boldsymbol{a}$ ve směru vektoru $\vec{s}$
- výpočet směrové derivace lze převést na výpočet derivace funkce jedné proměnné:
  označíme-li $\varphi(h) = f(\boldsymbol{a} + h\vec{s})$, pak $\varphi(0) = f(\boldsymbol{a})$ a
  $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(\boldsymbol{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a}+h\vec{s}) - f(\boldsymbol{a})}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h} = \varphi'(0)$

Příklad 20

Určete směrovou derivaci funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$ ve směru vektoru $\vec{s}$, je-li:
(a) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2, \boldsymbol{a} = [1, 1], \vec{s} = (\frac{1}{2}, 1)$
(b) $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}, \boldsymbol{a} = [0, -1], \vec{s} = (2, 1)$.

Parciální derivace

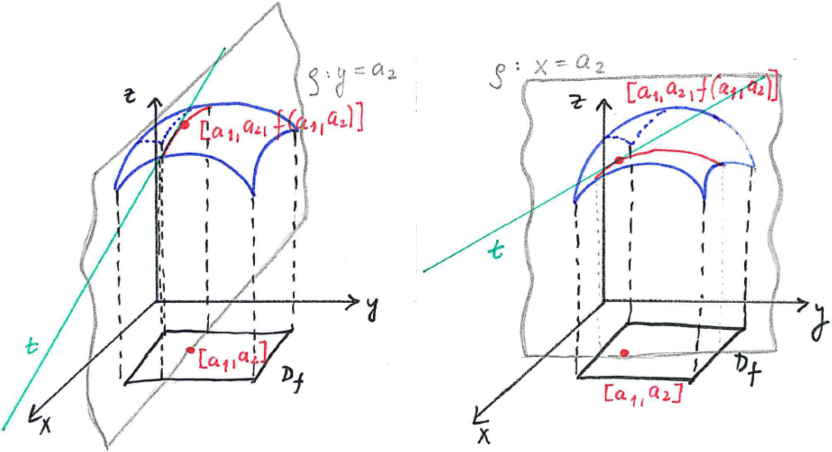
Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je reálná funkce n reálných proměnných a $\boldsymbol{a} = [a_1, \dots, a_n] \in \mathbb{R}^n$. Položme

$$f_i(x_i) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n), 1 \leq i \leq n.$$

Funkce $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je **parciální funkcí funkce** f. Má-li funkce f_i derivaci v bodě a_i, nazýváme ji **parciální derivací funkce f podle proměnné x_i v bodě $\boldsymbol{a}$** a značíme ji $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})$ nebo $f'_{x_i}(\boldsymbol{a})$.

– speciální případ směrové derivace, kdy $\vec{s} = \vec{e_i}$ (vektor $\vec{e_i}$ má i-tou souřadnici rovnu 1, ostatní souřadnice jsou rovny 0):

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e_i}}(\boldsymbol{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + h\vec{e_i}) - f(\boldsymbol{a})}{h} = $$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h}$$



Obrázek 7: Parciální derivace funkce $f(x, y)$ podle obou proměnných

- $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})$ popisuje, jak rychle se mění závisle proměnná se změnou proměnné x_i
- parciální derivaci funkce podle pevně zvolené proměnné vypočítáme tak, že funkci zderivujeme jen podle této proměnné, přičemž ostatní proměnné považujeme za konstanty
- pro parciální derivaci platí stejná pravidla jako pro derivaci funkce jedné proměnné!

Příklad 21

Určete parciální derivace funkce f podle všech proměnných:

(a) $f(x, y) = x^4 - 5x^3y^4 + 2x^2y^3 - y^{-2}$

(b) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

(c) $f(x, y, z) = \ln(z^3 - x + 3y^2)$.

Vektor $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ nazýváme **gradientem funkce** f a značíme jej f' nebo grad f.

– gradient funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$ lze využít pro výpočet směrových derivací:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(\boldsymbol{a}) = \vec{s} \cdot \operatorname{grad} f(\boldsymbol{a})$$

Příklad 22

Užitím gradientu určete směrovou derivaci funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$ ve směru vektoru $\vec{s}$, je-li:

(a) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2, \boldsymbol{a} = [1,1], \vec{s} = (\frac{1}{2}, 1)$

(b) $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}, \boldsymbol{a} = [0,-1], \vec{s} = (2,1)$.

Parciální derivace

Nechť m je libovolné, $1 \leq m \leq n, x_{i_1}, \ldots, x_{i_m} \in \{x_1, \ldots, x_n\}$. Pak funkce

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_m}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_m}} \frac{\partial^{m-1} f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_{m-1}}}$$

se nazývá *m*-**tá parciální derivace funkce** f **podle proměnných** $x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}$ (v tomto pořadí).

– někdy se také m-tá parciální derivace funkce f podle proměnných $x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}$ značí $f^{(m)}_{x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}}$

Příklad 23

Určete všechny parciální derivace druhého řádu funkce f:

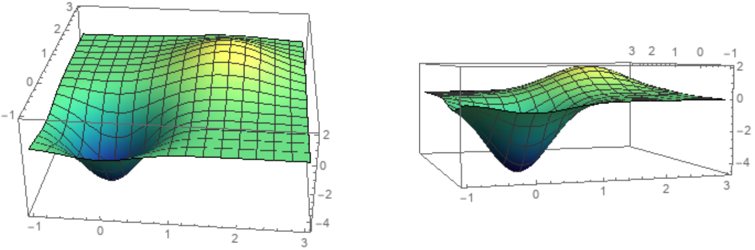
(a) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$

(b) $f(x, y) = x^4 - 5x^3y^4 + 2x^2y^3 - y^{-2}$.

Lokální extrémy funkcí dvou proměnných

Lokální extrémy

Nechť je funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definovaná na nějakém okolí bodu $\boldsymbol{a}$.
Funkce f má v bodě $\boldsymbol{a}$ **lokální maximum**, existuje-li takové okolí $U(\boldsymbol{a})$ bodu $\boldsymbol{a}$, že pro všechna $\boldsymbol{x}$ z $U(\boldsymbol{a}) \cap D_f$ platí: $f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{a})$.
Funkce f má v bodě $\boldsymbol{a}$ **lokální minimum**, existuje-li takové okolí $U(\boldsymbol{a})$ bodu $\boldsymbol{a}$, že pro všechna $\boldsymbol{x}$ z $U(\boldsymbol{a}) \cap D_f$ platí: $f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{a})$.



Obrázek 8: Příklad funkce dvou proměnných s lokálními extrémy, které jsou současně globálními extrémy

Lokální extrémy funkcí dvou proměnných

Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má v bodě $\boldsymbol{a}$ lokální extrém a nechť existují v tomto bodě všechny parciální derivace prvního řádu. Pak platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{a}) = 0, \frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{a}) = 0.$$

– body, pro které platí $\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{a}) = 0$, se nazývají **stacionární body**

– funkce f může mít lokální extrémy pouze ve stacionárních bodech, nebo v bodech, ve kterých neexistuje alespoň jedna parciální derivace prvního řádu

Nechť $\boldsymbol{a} \in D_f$. Označme

$$H(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\boldsymbol{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\boldsymbol{a}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\boldsymbol{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix}$$

jako **Hessovu matici** v bodě $\boldsymbol{a}$ a determinant

$$|H(\boldsymbol{a})| = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\boldsymbol{a}) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\boldsymbol{a}) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\boldsymbol{a}) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\boldsymbol{a})$$

jako Hessián v bodě $\boldsymbol{a}$.

Lokální extrémy funkcí dvou proměnných

Sylvestrovo rozhodovací kritérium

Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{a} \in D_f$ je stacionární bod a nechť v bodě $\boldsymbol{a}$ existuje i druhá parciální derivace. Pak:

- je-li $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\boldsymbol{a}) > 0$ a $|H(\boldsymbol{a})| > 0$, nastává v bodě $\boldsymbol{a}$ ostré lokální minimum,
- je-li $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\boldsymbol{a}) < 0$ a $|H(\boldsymbol{a})| > 0$, nastává v bodě $\boldsymbol{a}$ ostré lokální maximum,
- nenastává-li v bodě $\boldsymbol{a}$ situace 1 ani 2 a platí-li $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\boldsymbol{a}) \neq 0$ a $|H(\boldsymbol{a})| \neq 0$, nemá funkce v tomto bodě lokální extrém.

– v případě, že $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\boldsymbol{a}) = 0$ nebo $|H(\boldsymbol{a})| = 0$, kritérium selhává!

Příklad 24

Určete lokální extrémy funkce f:

(a) $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 4x + 3$

(b) $f(x, y) = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$.

Globální extrémy funkcí dvou proměnných

Globální extrémy

Funkce f má v bodě $\boldsymbol{a}$ **globální maximum**, jestliže platí: $f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{a})$ pro všechny body $\boldsymbol{x} \in D_f$.
Funkce f má v bodě $\boldsymbol{a}$ **globální minimum**, jestliže platí: $f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{a})$ pro všechny body $\boldsymbol{x} \in D_f$.

- souhrnně globální extrémy
- existence bodů, v nichž má spojitá funkce f na neprázdné uzavřené omezené množině M globální extrémy, je zaručena Weierstrassovou větou
- globální extrém se pak nachází buď:
  1) ve vnitřním bodě množiny M (tj. v bodě, ve kterém má funkce lokální extrém – již umíme najít) nebo
  2) na hranici množiny M (tj. v bodě, ve kterém má funkce tzv. vázaný extrém)

Vázané extrémy funkcí dvou proměnných

Vázané extrémy

Nechť funkce f, g jsou funkce dvou proměnných.
Funkce f má v bodě $\boldsymbol{a}$ **vázané maximum** s podmínkou $g(\boldsymbol{x}) = 0$, jestliže $g(\boldsymbol{a}) = 0$ a $f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{a})$ pro všechny body $\boldsymbol{x} \in D_f$ splňující podmínku $g(\boldsymbol{x}) = 0$.
Funkce f má v bodě $\boldsymbol{a}$ **vázané minimum** s podmínkou $g(\boldsymbol{x}) = 0$, jestliže $g(\boldsymbol{a}) = 0$ a $f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{a})$ pro všechny body $\boldsymbol{x} \in D_f$ splňující podmínku $g(\boldsymbol{x}) = 0$.

- podmínce $g(\boldsymbol{a}) = 0$ se někdy říká **vazba** ($\Rightarrow$ vázané extrémy)

Postup nalezení vázaných extrémů:

1) z vazby $g(\boldsymbol{x}) = 0$ lze vyjádřit některou z proměnných $\Rightarrow$ úloha se redukuje na nalezení globálních extrémů funkce jedné proměnné
2) z vazby $g(\boldsymbol{x}) = 0$ nelze vyjádřit žádnou z proměnných $\Rightarrow$ úloha se řeší tzv. **Lagrangeovou metodou**:
   utvoříme novou funkci $F = f + \lambda g$ a hledáme její lokální extrémy

---

Příklad 25

Určete body, v nichž má funkce f vázané extrémy s podmínkou $g(\boldsymbol{x}) = 0$:

(a) $f(x, y) = xy - x + y - 1, g(x, y) = x + y - 1$

(b) $f(x, y) = x + y, g(x, y) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - 1$ (Lagrangeova metoda).

Příklad 26

Určete body, v nichž má funkce $f(x,y) = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$ globální extrémy, je-li D_f trojúhelník zadaný nerovnostmi $x \geq 0, y \geq 0, y \leq 3 - x$.

Plán na 29. 11. 2019

Integrální počet funkcí více proměnných

- integrační obory
- dvojný/trojný integrál a jeho výpočet
- křivkový integrál 1. druhu

Integrální počet funkcí více proměnných

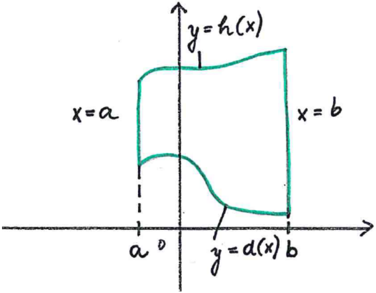
- rozšíření pojmu určitého integrálu na funkce n proměnných $\rightarrow$ n-rozměrný integrál (omezíme se na dvojrozměrný (dvojný) a trojrozměrný (trojný) integrál)
- n-rozměrný integrál se formálně definuje stejně jako u funkce jedné proměnné
- důležitý je popis integračního oboru
- výpočet n-rozměrného integrálu se převádí na výpočet n jednorozměrných integrálů (tzv. Fubiniho věta)

– integrační obor pro dvojný integrál: obrazec mezi grafy spojitých funkcí

1) Integrační obory v kartézských souřadnicích v $\mathbb{R}^2$

Obrazec typu I

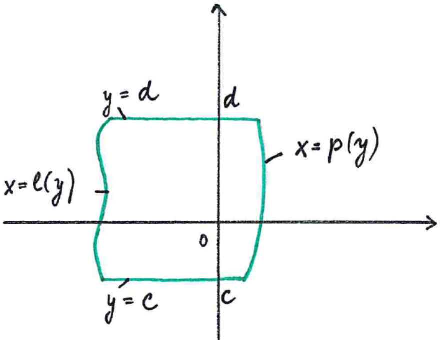
$$a \leq x \leq b$$
$$d(x) \leq y \leq h(x)$$



Obrázek 9: Obrazec typu I

Obrazec typu II

$$c \leq y \leq d$$
$$l(y) \leq x \leq p(y)$$



Obrázek 9: Obrazec typu II

Poznámka: Existují obory, které nejsou ani jedním z výše uvedených typů, ale dají se vyjádřit jako sjednocení obrazců určitého typu.

Příklad 27

Zapište jako obrazec typu I nebo II, příp. jako sjednocení:

(a) obdélník o vrcholech $[-1,-1],[1,-1],[-1,4],[1,4]$,

(b) obor ohraničený přímkami $x=1, x=3$ a grafy funkcí $y=e^x$, $y=5x+7$,

(c) trojúhelník o vrcholech $[-1,0],[3,0],[1,2]$.

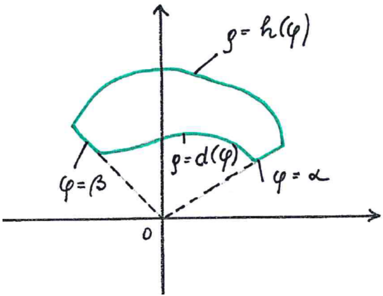
2) Integrační obory v polárních souřadnicích

- bod $P = [x, y] \in \mathbb{R}^2$ lze zadat dvojicí $[\rho, \varphi]$, kde ρ udává vzdálenost bodu P od počátku soustavy souřadnic a φ je velikost úhlu, který svírá průvodič bodu P s kladnou poloosou x
- ρ, φ se nazývají polární souřadnice bodu
- transformační rovnice:

$$x = \rho \cos \varphi$$
$$y = \rho \sin \varphi$$

Obrazec v polárních souřadnicích

$$\alpha \leq \varphi \leq \beta$$
$$d(\varphi) \leq \rho \leq h(\varphi)$$



Obrázek 10: Obrazec v polárních souřadnicích

Příklad 28

Transformujte pomocí polárních souřadnic obor ohraničený:

(a) kružnicí $x^2 + y^2 = 2$,

(b) kružnicí $x^2 + y^2 = 4$ a přímkami $y = 2x, y = 0$,

(c) kružnicí $x^2 + y^2 = 1$ a přímkami $y = x, y = -2x$ pro $x \geq 0$.

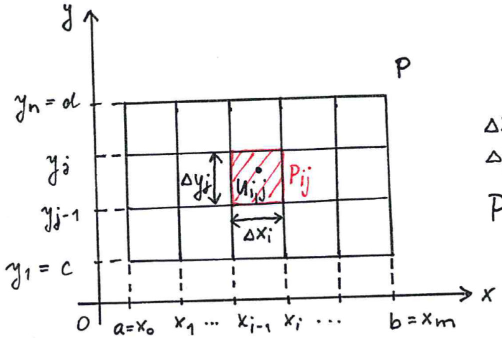
Dvojný integrál

- nechť $f = f(x, y)$ je funkce definovaná na omezené množině $A \subset \mathbb{R}^2$, pak dvojný integrál funkce f na oboru A značíme

$$\iint_A f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

- nejprve se definuje dvojný integrál na obdélníku, následně na obecné omezené množině

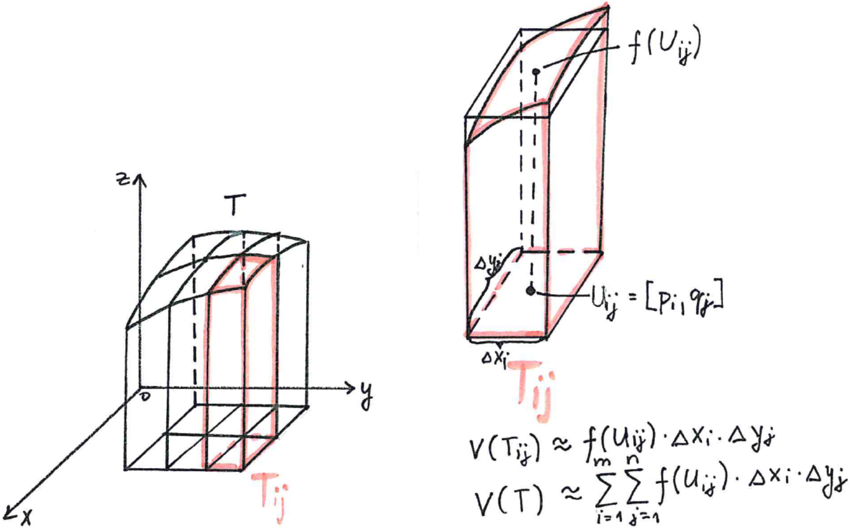
1) Definice dvojného integrálu na obdélníku



$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, \dots, m$$
$$\Delta y_j = y_j - y_{j-1}, \quad j = 1, \dots, n$$
$$P_{ij} = \langle x_{i-1}, x_i \rangle \times \langle y_{j-1}, y_j \rangle$$

Obrázek 11: Dělení obdélníku P

Dvojný integrál



Obrázek 12: Těleso složené z *mn* menších těles

Dvojný integrál

Definice dvojného integrálu na obdélníku

Nechť f je spojitá funkce dvou proměnných na obdélníku P. Dvojným integrálem funkce f na P je

$$\iint_P f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(U_{ij})\Delta x_i \Delta y_j,$$

pokud tato limita existuje pro libovolnou volbu bodu U_{ij} z P_{ij}.

Existence dvojného integrálu

Postačující podmínkou pro existenci dvojného integrálu

$$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

je spojitost integrované funkce $f(x,y)$ na integračním oboru A.

Dvojný integrál

2) Definice dvojného integrálu na obecné množině

- zvolíme obdélník P tak, aby $A \subset P$
- definujeme pomocnou funkci F tak, že

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{pro } [x,y] \in A, \\ 0 & \text{pro } [x,y] \notin A. \end{cases}$$

Definice dvojného integrálu na obecné množině

Nechť f je spojitá funkce dvou proměnných na množině A. Dvojným integrálem funkce f na A je

$$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_P f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Dvojný integrál

Existence dvojného integrálu

Postačující podmínkou pro existenci dvojného integrálu

$$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

je spojitost integrované funkce $f(x,y)$ na integračním oboru A.

Dvojný integrál

Vlastnosti dvojného integrálu

Nechť f a g jsou integrovatelné funkce na $A \subset \mathbb{R}^2$ a $c \in \mathbb{R}$. Pak jsou integrovatelné i funkce cf a $f + g$ a platí:

a)

$$\iint_A cf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = c\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

b)

$$\iint_A [f(x,y) + g(x,y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_A g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

c) je-li navíc $A = A_1 \cup A_2$ a obory A_1, A_2 nemají společné vnitřní body, pak

$$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{A_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{A_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

– f je spojitá na oboru A

1) A je obrazec typu I, tj. $a \leq x \leq b, d(x) \leq y \leq h(x)$

$$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{d(x)}^{h(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

Příklad 29

Vypočtěte

$$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde:

(a) $f(x,y) = \frac{x}{y^2}$, A je obdélník $\langle 1;2\rangle \times \langle 3;4\rangle$,

(b) $f(x,y) = yx^2$, A je obor ohraničený křivkami $y = x^2$, $y = x$, $x = 0$, $x = 1$.

2) A je obrazec typu II, tj. $c \leq y \leq d, l(y) \leq x \leq p(y)$

$$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_{l(y)}^{p(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

Příklad 30

Vypočtěte

$$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde $f(x,y) = xy$, A je obor ohraničený křivkami $x^2 + y^2 = 1, y = \frac{x}{2}, y = 0.$

3) $\bar{A}$ je obor, který vznikl transformací oboru A pomocí polárních souřadnic, tj. $\alpha \leq \varphi \leq \beta, d(\varphi) \leq \rho \leq h(\varphi)$

$$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\bar{A}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi =$$
$$= \int_\alpha^\beta \left(\int_{d(\varphi)}^{h(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho \right)\mathrm{d}\varphi$$

Příklad 31

Vypočtěte

$$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde $f(x,y) = x^2 + y^2$, A je obor ohraničený křivkami $x^2 + y^2 = 1$, $y = \sqrt{3}x, x = 0$.

Aplikace dvojného integrálu

Obsah rovinného obrazce A

$$S_A = \iint_A 1 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

Hmotnost a souřadnice těžiště rovinné desky A s hustotou $h(x, y)$

$$m_A = \iint_A h(x, y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

$$\begin{aligned} T = [x_T, y_T] : x_T &= \frac{1}{m_A} \iint_A x \cdot h(x, y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \\ y_T &= \frac{1}{m_A} \iint_A y \cdot h(x, y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

Příklad 32

Vypočtete obsah, hmotnost a souřadnice těžiště rovinné desky A s hustotou $h(x, y)$, je-li:

(a) A ohraničená osou x, přímkou $x = 1$ a křivkou $y = \sqrt{x}$, $h(x, y) = x + y$,

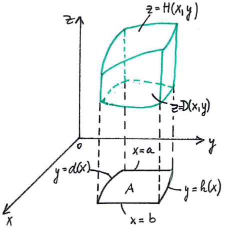
(b) A ohraničená osou x a horní polovinou kružnice $x^2 + y^2 = 1$, $h(x, y) = x^2 + y^2$.

– těleso mezi grafy spojitých funkcí dvou proměnných

1) Integrační obory v kartézských souřadnicích v $\mathbb{R}^3$

Těleso mezi grafy spojitých funkcí $z = D(x, y), z = H(x, y)$

$$a \leq x \leq b$$
$$d(x) \leq y \leq h(x)$$
$$D(x, y) \leq z \leq H(x, y)$$



Obrázek 13: Těleso mezi grafy spojitých funkcí $D(x, y), H(x, y)$

Příklad 33

Vyjádřete jako těleso mezi grafy spojitých funkcí:

(a) kvádr ohraničený rovinami $x = 0, x = 6, y = 0, y = 3, z = 0, z = 2$,

(b) obor ohraničený rovinami $x = 0, y = 0, z = 0, 2x + y + z = 3$,

(c) obor ohraničený plochou $z = x^2 + y^2$ a rovinou $z = 5$.

2) Integrační obory ve válcových (cylindrických) souřadnicích

- bod $P = [x, y, z] \in \mathbb{R}^3$ lze zadat dvojicí $[\rho, \varphi, \theta]$, kde ρ udává vzdálenost průmětu bodu P do roviny xy od počátku soustavy souřadnic a φ je velikost úhlu, který svírá průvodič průmětu bodu P s kladnou poloosou x
- ρ, φ, z se nazývají válcové souřadnice bodu (nebo také polární souřadnice v trojrozměrném prostoru)
- transformační rovnice:

$$x = \rho \cos \varphi$$
$$y = \rho \sin \varphi$$
$$z = z$$

Obor ve válcových souřadnicích

$$\alpha \leq \varphi \leq \beta$$
$$d(\varphi) \leq \rho \leq h(\varphi)$$
$$D(\rho, \varphi) \leq z \leq H(\rho, \varphi)$$

Příklad 34

Transformujte pomocí válcových souřadnic obor ohraničený:

(a) plochami $z = x^2 + y^2 = 2, z = 5$,

(b) plochami $z = 1 + \sqrt{x^2 + y^2}, z = 3$,

(c) plochami $x^2 + y^2 = 1, z = -2, z = 2$.

3) Integrační obory v kulových (sférických) souřadnicích

- bod $P = [x, y, z] \in \mathbb{R}^3$ lze zadat dvojicí $[r, \varphi, \theta]$, kde r udává vzdálenost bodu P od počátku soustavy souřadnic, φ je velikost úhlu, který svírá průvodič průmětu bodu P do roviny xy s kladnou poloosou x ($\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$) a θ je velikost úhlu, který svírá průvodič bodu P s kladnou poloosou z ($\theta \in \langle 0, \pi \rangle$)
- r, φ, θ se nazývají kulové (sférické) souřadnice bodu
- transformační rovnice:

$$x = r \cos \varphi \sin \theta$$
$$y = r \sin \varphi \sin \theta$$
$$z = r \cos \theta$$

Obor v kulových souřadnicích

$$\alpha \leq \varphi \leq \beta$$
$$\gamma \leq \theta \leq \delta$$
$$D(\varphi, \theta) \leq r \leq H(\varphi, \theta)$$

Příklad 35

Transformujte pomocí kulových souřadnic obor ohraničený:

(a) plochami $x^2 + y^2 + z^2 = 5$,

(b) plochami $x^2 + y^2 + z^2 = 2, x = 0, y = 0, z = 0$.

Trojný integrál

– definice, vlastnosti a existence analogicky jako u dvojného integrálu

Výpočet trojného integrálu

– f je spojitá na oboru B

1) B je těleso určené nerovnostmi $a \leq x \leq b$, $d(x) \leq y \leq h(x)$, $D(x,y) \leq z \leq H(x,y)$

$$\iiint_B f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_a^b \left(\int_{d(x)}^{h(x)} \left(\int_{D(x,y)}^{H(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

2) $\bar{B}$ je obor, který vznikl transformací oboru B pomocí válcových souřadnic

$$\iiint_B f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{\bar{B}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$$

3) $\bar{B}$ je obor, který vznikl transformací oboru B pomocí kulových souřadnic

$$\iiint_B f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z =$$

$$= \iiint_{\bar{B}} f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)\cdot\rho^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$$

Objem tělesa B

$$V_B = \iiint_B 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$

Hmotnost a souřadnice těžiště tělesa B s hustotou $h(x, y, z)$

$$m_B = \iiint_B h(x, y, z) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$

$$\begin{aligned} T = [x_T, y_T, z_T] : x_T &= \frac{1}{m_B} \iiint_B x \cdot h(x, y, z) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \\ y_T &= \frac{1}{m_B} \iiint_B y \cdot h(x, y, z) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \\ z_T &= \frac{1}{m_B} \iiint_B z \cdot h(x, y, z) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \end{aligned}$$

Příklad 36

Vypočtěte objem, hmotnost a souřadnice těžiště tělesa B s hustotou $h(x,y)$, je-li B ohraničené plochami:

(a) $z = x^2 + y^2, z = 5, h(x,y,z) = x + y,$

(b) $z = 1 + \sqrt{x^2 + y^2}, z = 3, h(x,y,z) = k,$

(c) $x^2 + y^2 + z^2 = 2, x = 0, y = 0, z = 0, h(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (pro $z \geq 0$).

Křivkový integrál 1. druhu

- křivka v rovině zadaná parametrickými rovnicemi:

$$C : x = x(t), y = y(t), t \in \langle a, b\rangle$$

- křivka v prostoru zadaná parametrickými rovnicemi:

$$C : x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in \langle a, b\rangle$$

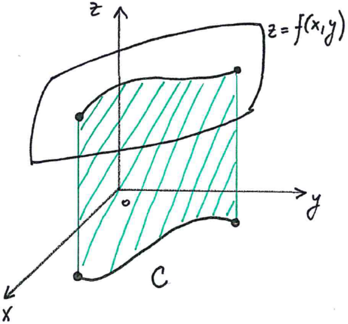
- hladká křivka v rovině: pro každé $t \in \langle a, b\rangle$ existují spojité derivace $x'(t), y'(t)$ a nejsou současně rovny 0 (analogicky v prostoru)
- po částech hladká křivka: vznikne spojením hladkých křivek

Nechť $f = f(x, y)$ je reálná funkce na po částech hladké křivce $C : x = x(t), y = y(t), t \in \langle a; b\rangle$. Pak **křivkový integrál 1. druhu** funkce f podél křivky C je definován jako

$$\int_C f(x, y)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Křivkový integrál 1. druhu

– geometrická interpretace křivkového integrálu 1. druhu uvedeného výše je obsah plochy, ohraničené rovinou $z = 0$ a grafem funkce $z = f(x, y)$, vytvořené přímkami rovnoběžnými s osou z protínající křivku C



Obrázek 14: Geometrická interpretace křivkového integrálu 1. druhu

- analogicky je definován křivkový integrál 1. druhu pro funkci tří proměnných
- křivkový integrál 1. druhu má stejné vlastnosti jako určitý integrál

---

Příklad 37

Vypočtěte $\int_C f(x,y)\,\mathrm{d}s$, kde:
(a) $f(x,y) = 2x$, C je část paraboly $y = x^2$ s počátečním bodem $[1,1]$ a koncovým bodem $[2,4]$,
(b) $f(x,y) = x^2 + y^2$, C je kružnice $x^2 + y^2 = 1$.

Aplikace křivkového integrálu 1. druhu

Délka křivky C

$$l = \int_C 1 \, \mathrm{d}s$$

Hmotnost a souřadnice těžiště křivky s délkovou hustotou $h(x, y)$

$$m = \int_C h(x, y) \, \mathrm{d}s$$

$$\begin{aligned} T = [x_T, y_T] : x_T &= \frac{1}{m} \int_C x \cdot h(x, y) \, \mathrm{d}s \\ y_T &= \frac{1}{m} \int_C y \cdot h(x, y) \, \mathrm{d}s \end{aligned}$$

Příklad 38

Vypočtete délku, hmotnost a souřadnice těžiště drátu s délkovou hustotou $h(x, y)$, má-li tento drát tvar půlkružnice popsané parametricky $x = 2\cos t, y = 2\sin t, t \in \langle 0, \pi \rangle$ a $h(x, y) = y$.

Plán na 30. 11. 2019

Obyčejné diferenciální rovnice

- základní pojmy
- separace proměnných
- lineární diferenciální rovnice 1. řádu
- lineární diferenciální rovnice vyšších řádů s konstantními koeficienty

Obyčejné diferenciální rovnice

- **obyčejná diferenciální rovnice** (zkráceně ODR) je rovnice

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

- **řád ODR** je nejvyšší řád derivace vyskytující se v rovnici
- **řešením ODR na intervalu** (c, d) je každá funkce $\varphi(x)$ definovaná na (c, d), pro kterou platí

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0 \quad \forall x \in (c, d)$$

- **obecné řešení ODR** je množina všech řešení rovnice (vystupují v něm konstanty)
- **partikulární řešení ODR** je jedno konkrétní řešení rovnice, obvykle získáno z počátečních podmínek (nevystupují v něm konstanty)
- dále existují tzv. **výjimečná (singulární) řešení ODR**, která nejsou obsažena v obecném řešení

Příklad 39

Je dána diferenciální rovnice

$$y'' - 4y' + 3y = 10\sin x.$$

(a) Určete řád této rovnice.
(b) Ukažte, že funkce $\varphi_1(x) = 2\cos x + \sin x, \varphi_2(x) = 2\cos x + \sin x + e^x$ jsou řešeními rovnice na $\mathbb{R}$.
(c) Ukažte, že funkce $\varphi(x) = 2\cos x + \sin x + c_1 e^x + c_2 e^{3x}$ je pro libovolné $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ rovněž řešení rovnice na $\mathbb{R}$.

– pokud žádáme, aby

$$\varphi(x_0) = y_0, \varphi'(x_0) = y_1, \dots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},$$

nazývá se úloha

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$
$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

počáteční úloha nebo **Cauchyho úloha** ($y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ se nazývají **počáteční podmínky**)

Obyčejná diferenciální rovnice 1. řádu

– obyčejná diferenciální rovnice 1. řádu se spojitou funkcí f

$$y'(x) = f(x, y)$$

– Cauchyho úloha

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

Věta o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyho úlohy

Nechť $\delta > 0$ a nechť $I = (x_0 - 2\delta, x_0 + 2\delta) \times (y_0 - 2\delta, y_0 + 2\delta)$. Předpokládejme, že v rovnici $y'(x) = f(x, y)$ je funkce f spojitá na intervalu I a že existuje kladné číslo K takové, že pro všechna $x \in (x_0 - 2\delta, x_0 + 2\delta)$ a pro všechna $y_1, y_2 \in (y_0 - 2\delta, y_0 + 2\delta)$ platí $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|$. Potom platí:

(a) Existuje interval (c, d) a řešení rovnice $y'(x) = f(x, y)$ na tomto intervalu takové, že je $x_0 \in (c, d)$ a $\varphi(x_0) = y_0$.

(b) Jestliže řešení φ_1, φ_2 splňují podmínku $\varphi(x_0) = y_0$, existuje okolí bodu x_0, na kterém tato řešení splývají.

Obyčejná diferenciální rovnice vyššího řádu

– obyčejnou diferenciální rovnici n-tého řádu

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

lze upravit na soustavu rovnic 1. řádu

$$y_1'(x) = y_2, y_2'(x) = y_3, \ldots, y_n'(x) = f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

položíme-li

$$y(x) = y_1(x), y'(x) = y_2(x), \ldots, y^{(n-1)}(x) = y_n(x)$$

– lze zformulovat obdobnou větu o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyho úlohy

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),$$
$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

Separace proměnných

– diferenciální rovnicí se separovanými proměnnými se nazývá rovnice

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y),$$

kde f_1, f_2 jsou spojité funkce jedné proměnné

Jak řešit rovnice se separovanými proměnnými?

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f_1(x) f_2(y)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{f_2(y)} = f_1(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{f_2(y)} = \int f_1(x)\,\mathrm{d}x + C$$

Příklad 40

Řešte rovnici:

(a) $y' = \frac{x}{y^2}$ (b) $y' = -\frac{x-2}{y}, y(6) = -3$ (c) $y' = y^2$.

Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

- lineární diferenciální rovnicí (zkráceně LDR) 1. řádu se nazývá rovnice

$$y' + a(x)y = b(x), \qquad x \in (c, d), \tag{2}$$

kde $a(x), b(x)$ jsou spojité funkce na (c, d)

- přiřazená rovnice k rovnici (2) je rovnice

$$y' + a(x)y = 0 \tag{3}$$

(nebo také přiřazená homogenní rovnice)

- obecné řešení rovnice (2) je součet jednoho pevně zvoleného řešení rovnice (2) (tzv. partikulárního řešení) a obecného řešení homogenní rovnice (3): $y_O = y_P + y_H$

Jak řešit LDR 1. řádu?

1) nalezneme obecné řešení přiřazené homogenní rovnice y_H pomocí metody separace proměnných:

$$y_H = C \cdot \mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}, x \in (c, d)$$

2) nalezneme partikulární řešení rovnice y_P pomocí metody variace konstanty:
   a) hledáme partikulární řešení ve tvaru podobném obecnému řešení y_H, ale C je nyní neznámá funkce, tj. $y_P = C(x) \cdot \mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}$
   b) $y_P = C(x) \cdot \mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}$ zderivujeme a dosadíme do rovnice (2) za y_P, y_P'
   c) vyjádříme $C'(x)$ a integrováním získáme $C(x)$
3) $y_O = y_H + y_P$

Příklad 41
Řešte rovnici $y' + 2xy = \mathrm{e}^{-x^2}$.

Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu

– lineární diferenciální rovnicí n-tého řádu se nazývá rovnice

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = b(x), \qquad x \in (c, d), \tag{4}$$

kde funkce $a_1(x), \ldots, a_n(x), b(x)$ jsou spojité na (c, d)

– přiřazená rovnice k rovnici (4) je rovnice

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = 0 \tag{5}$$

(nebo také přiřazená homogenní rovnice)

– obecné řešení rovnice (4) je součet jednoho pevně zvoleného řešení rovnice (4) (tzv. partikulárního řešení) a obecného řešení homogenní rovnice (5)

Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty

- lineární diferenciální rovnicí n-tého řádu s konstantními koeficienty se nazývá rovnice

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = b(x), \qquad x \in (c, d), \tag{6}$$

  kde $b(x)$ je spojitá funkce na (c, d)
- přiřazená rovnice k rovnici (6) je rovnice

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0 \tag{7}$$

  (nebo také přiřazená homogenní rovnice)
- obecné řešení rovnice (6) je součet jednoho pevně zvoleného řešení rovnice (6) (tzv. partikulárního řešení) a obecného řešení homogenní rovnice (7)

Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty

Jak řešit LDR n-tého řádu s konstantními koeficienty?

1) nalezneme obecné řešení přiřazené homogenní rovnice y_H:
   a) vypočítáme kořeny charakteristické rovnice (CHR) $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a^n = 0$
      i) existuje-li n reálných navzájem různých kořenů CHR $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, jsou funkce $\mathrm{e}^{\lambda_1 x}, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_n x}$ řešeními rovnice (7) (funkce, které jsou lineárně nezávislé a řeší rovnici (7), tvoří tzv. fundamentální systém řešení rovnice (7))
      ii) existuje-li n reálných kořenů CHR včetně násobnosti, tj. λ_1 je k_1-násobný kořen, λ_2 je k_2-násobný kořen, ..., λ_r je k_r-násobný kořen $(k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n)$, tvoří funkce $\mathrm{e}^{\lambda_1 x}, x\mathrm{e}^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{k_1-1}\mathrm{e}^{\lambda_1 x}, \mathrm{e}^{\lambda_2 x}, x\mathrm{e}^{\lambda_2 x}, \ldots, x^{k_2-1}\mathrm{e}^{\lambda_2 x}, \ldots,$ $\mathrm{e}^{\lambda_r x}, x\mathrm{e}^{\lambda_r x}, \ldots, x^{k_r-1}\mathrm{e}^{\lambda_r x}$ fundamentální systém řešení rovnice (7)

Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty

iii) existuje-li $n = 2m$ komplexních (nikoli reálných) navzájem různých kořenů CHR $\{\lambda_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \bar{\lambda}_1 = \alpha_1 - i\beta_1, \lambda_2 = \alpha_2 - i\beta_2, \bar{\lambda}_2 = \alpha_2 - i\beta_2, \ldots, \lambda_m = \alpha_m + i\beta_m, \bar{\lambda}_m = \alpha_m - i\beta_m\}$, pak funkce $e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x, e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x, \ldots, e^{\alpha_m x}\sin\beta_m x, e^{\alpha_m x}\cos\beta_m x$ tvoří fundamentální systém řešení rovnice (7)

iiiii) existuje-li n komplexních kořenů CHR včetně násobnosti, tj. $\lambda_{1,2} = \alpha_1 \pm i\beta_1$ je dvojice komplexně sdružených k_1-násobných komplexních kořenů, $\lambda_{3,4} = \alpha_2 \pm i\beta_2$ je dvojice komplexně sdružených k_2-násobných komplexních kořenů, atd., pak funkce $e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x, e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x, xe^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x, xe^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x \ldots,$ $x^{k_1-1}e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x, x^{k_1-1}e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x, e^{\alpha_2 x}\sin\beta_2 x,$ $e^{\alpha_2}\cos\beta_2 x, xe^{\alpha_2 x}\sin\beta_2 x, xe^{\alpha_2 x}\cos\beta_2 x \ldots,$ $x^{k_2-1}e^{\alpha_2 x}\sin\beta_2 x, x^{k_2-1}e^{\alpha_2 x}\cos\beta_2 x, \ldots$ tvoří fundamentální systém řešení rovnice (7)

Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty

b) y_H je pak ve tvaru $y_H = c_1y_1 + c_2y_2 + +c_ny_n$, kde $\{y_1, \dots, y_n\}$ je fundamentální systém řešení rovnice (7)

2) nalezneme partikulární řešení rovnice y_P:

a) buď použitím metody variace konstant: $y_P = \sum_{i=1}^{n} c_i(x)y_i$, kde $\{y_1, \dots, y_n\}$ je fundamentální systém řešení přiřazené homogenní rovnice, přičemž neznámé funkce $c_1(x), \dots, c_n(x)$ získáme jako řešením

$$
\begin{aligned}
c_1'(x)y_1 + \cdots + c_n'(x)y_n &= 0 \\
c_1'(x)y_1' + \cdots + c_n'(x)y_n' &= 0 \\
&\cdots \\
c_1'(x)y_1^{(n-2)} + \cdots + c_n'(x)y_n^{(n-2)} &= 0 \\
c_1'(x)y_1^{(n-1)} + \cdots + c_n'(x)y_n^{(n-1)} &= 0
\end{aligned}
$$

Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty

Poznámka: Vyřešením soustavy získáme $c_1'(x), \dots, c_n'(x)$ - tyto funkce je potřeba ještě integrovat!

b) nebo pokud má pravá strana speciální tvar

$$b(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}(P_n(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\sin(\beta x)),$$

pak

$$y_P = x^k \mathrm{e}^{\alpha x}(R_p(x)\cos(\beta x) + S_p(x)\sin(\beta x)),$$

kde $R_p(x), S_p(x)$ jsou neznámé polynomy stupně $p = \max\{n, m\}$ a k je rovno 0, pokud $\alpha \pm i\beta$ není kořen CHR, v opačném případě je k rovno násobnosti kořenu

i) je-li $b(x) = P_n(x)$ neboli $b(x) = \mathrm{e}^{0x} P_n(x)$, pak:

$$y_P = \begin{cases} R_n(x) & \text{pokud 0 není kořenem CHR,} \\ x^k R_n(x) & \text{pokud 0 je } k\text{-násobným kořenem CHR.} \end{cases}$$

Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty

ii) je-li $b(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$, pak:

$$y_P = \begin{cases} e^{\alpha x} R_n(x) & \text{pokud } \alpha \text{ není kořenem CHR,} \\ x^k e^{\alpha x} R_n(x) & \text{pokud } \alpha \text{ je } k\text{-násobným kořenem CHR.} \end{cases}$$

iii) je-li $b(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos(\beta x) + Q_m \sin(\beta x))$, pak ($p = \max\{n, m\}$):

$$y_P = \begin{cases} e^{\alpha x}(R_p(x)\cos(\beta x) + S_p \sin(\beta x)) \\ \qquad \text{pokud } \alpha \pm i\beta \text{ není kořenem CHR,} \\ x^k e^{\alpha x}(R_p(x)\cos(\beta x) + S_p \sin(\beta x)) \\ \qquad \text{pokud } \alpha \pm i\beta \text{ je } k\text{-násobným kořenem CHR.} \end{cases}$$

Příklad 42

Řešte rovnici:

(a) $y'' - 3y' + 2y = 0$

(b) $y'' - 5y' + 6y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 5$

(c) $y'''' - y = 0$

(d) $y'' + 2y' + y = x^2$

(e) $y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^x$

(f) $3y'' - 2y' = 10 \cos 2x$

Plán na 3. 1. 2020

Soustavy obyčejných lineárních diferenciálních rovnic

- základní pojmy
- homogenní soustavy obyčejných lineární diferenciálních rovnic 1. řádu
- nehomogenní soustavy obyčejných lineární diferenciálních rovnic 1. řádu

Soustavy obyčejných lineárních diferenciálních rovnic

- **soustavou obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu** (zkráceně SOLDR) nazýváme soustavu ve tvaru

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= a_{11}(x)y_1(x) + a_{12}(x)y_2(x) + \cdots + a_{1n}(x)y_n(x) + b_1(x) \\ y_2'(x) &= a_{21}(x)y_1(x) + a_{22}(x)y_2(x) + \cdots + a_{2n}(x)y_n(x) + b_2(x) \\ &\vdots \\ y_n'(x) &= a_{n1}(x)y_1(x) + a_{n2}(x)y_2(x) + \cdots + a_{nn}(x)y_n(x) + b_n(x) \end{aligned} \tag{1}$$

- označíme-li

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{1n}(x) \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix},$$

lze soustavu (1) psát zkráceně $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}$

Soustavy obyčejných lineárních diferenciálních rovnic

– je-li $\mathbf{b} = 0$, nazývá se soustava (1) **homogenní**, jinak **nehomogenní**

Věta o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyho úlohy pro SOLDR

Nechť maticová funkce $\mathbf{A}$ a vektorová funkce $\mathbf{b}$ jsou spojité na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Potom má pro každý bod $(x_0, \mathbf{y}_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ Cauchyova úloha

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}, \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$$

právě jedno řešení definované na I.

Poznámka: Soustavy vyšších řádů lze zavedením nových neznámých převést na SOLDR 1. řádu.

Homogenní SOLDR 1. řádu

– uvažujeme homogenní soustavu

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} \tag{2}$$

– řešení soustavy (2) tvoří vektorový prostor dimenze n

– každých n lineárně nezávislých řešení $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$ soustavy (2) na intervalu I nazýváme fundamentálním systémem soustavy (2) $\Rightarrow$ obecné řešení soustavy (2) je ve tvaru

$$\mathbf{y}_H = c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2 + \cdots + c_n\mathbf{y}_n$$

Homogenní SOLDR 1. řádu s konstantními koeficienty

- tj. **A** je reálná matice
- předpokládáme-li řešení ve tvaru $\mathbf{y} = e^{\lambda x}\mathbf{v}$, pak dosazením do soustavy (2) získáme $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, kde λ je vlastní číslo matice **A** a **v** je vlastní vektor matice **A** příslušný k vlastnímu číslu λ
- **charakteristickým polynomem matice A** nazýváme determinant matice $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$ (**E** je jednotková matice řádu n), tj.

$$P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$$

- vlastní čísla matice jsou řešení charakteristické rovnice $P(\lambda) = 0$
- vlastní vektor matice **A** příslušný k vlastnímu číslu λ je nenulové řešení soustavy

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{v} = \mathbf{o}$$

(**o** je nulový vektor délky n)

Příklad 43

Najděte vlastní čísla a příslušné vlastní vektory následujících matic:

(a)

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix},$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

(c)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jak řešit homogenní SOLDR 1. řádu s konstantními koeficienty?

1) nalezneme vlastní čísla matice **A** - je jich n včetně násobnosti: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

2) ke každému vlastnímu číslu λ_i určíme jedno řešení $\mathbf{y}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$

   i) jsou-li $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ různá vlastní čísla a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ odpovídající vlastní vektory, tvoří funkce

$$\mathrm{e}^{\lambda_1 x}\mathbf{v}_1, \mathrm{e}^{\lambda_2 x}\mathbf{v}_2, \dots, \mathrm{e}^{\lambda_n x}\mathbf{v}_n$$

   fundamentální systém řešení soustavy (2)

   ii) je-li $\lambda = \alpha + i\beta$ a $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ dvojice komplexně sdružených vlastních čísel s odpovídajícími vlastními vektory $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_2$ a $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_1 - i\mathbf{v}_2$ $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^n)$, tvoří funkce

$$\mathrm{e}^{\alpha x}(\mathbf{v}_1 \cos \beta x - \mathbf{v}_2 \sin \beta x), \mathrm{e}^{\alpha x}(\mathbf{v}_1 \sin \beta x + \mathbf{v}_2 \cos \beta x)$$

   fundamentální systém řešení soustavy (2)
   (nebo-li za reálná řešení stačí vzít reálnou a imaginární složku řešení odpovídající vlastnímu číslu λ:

Homogenní SOLDR 1. řádu s konstantními koeficienty

$$e^{\lambda x}\mathbf{v} = e^{(\alpha+i\beta)x}(\mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_2) = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)(\mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_2) =$$

$$= e^{\alpha x}(\mathbf{v}_1\cos\beta x + i\mathbf{v}_2\cos\beta x + i\mathbf{v}_1\sin\beta x - \mathbf{v}_2\sin\beta x) =$$

$$= e^{\alpha x}(\mathbf{v}_1\cos\beta x - \mathbf{v}_2\sin\beta x) + ie^{\alpha x}(\mathbf{v}_2\cos\beta x + \mathbf{v}_1\sin\beta x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathfrak{Re}(e^{\lambda x}\mathbf{v}) = e^{\alpha x}(\mathbf{v}_1\cos\beta x - \mathbf{v}_2\sin\beta x)$$

a

$$\mathfrak{Im}(e^{\lambda x}\mathbf{v}) = e^{\alpha x}(\mathbf{v}_2\cos\beta x + \mathbf{v}_1\sin\beta x),$$

což jsou funkce uvedené výše)

Jak řešit homogenní SOLDR 1. řádu s konstantními koeficienty?

iii) je-li λ vlastní číslo násobnosti větší než jedna, nemáme dostatečný počet vlastních vektorů $\Rightarrow$ hledáme tzv. **zobecněné vlastní vektory** následovně:

- nalezneme takový vektor $\mathbf{v}$, pro který je $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})^2\mathbf{v}=\mathbf{o}$, ale $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\mathbf{v}\neq\mathbf{o}$, pak je pro takový vektor funkce

$$e^{\lambda x}\left(\mathbf{E}+\frac{x}{1!}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\right)\mathbf{v}$$

řešením soustavy (2)

- pokud nemáme dostatečný počet lineárně nezávislých řešení, nalezneme vektor $\mathbf{v}$ takový, pro který je $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})^3\mathbf{v}=\mathbf{o}$, ale $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})^2\mathbf{v}\neq\mathbf{o}$, pak je pro takový vektor funkce

$$e^{\lambda x}\left(\mathbf{E}+\frac{x}{1!}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})+\frac{x^2}{2!}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})^2\right)\mathbf{v}$$

řešením soustavy (2)

Jak řešit homogenní SOLDR 1. řádu s konstantními koeficienty?

- pokud stále nemáme dostatečný počet lineárně nezávislých řešení, pokračujeme analogickým postupem dále (tj. je-li λ k-násobné vlastní číslo, provedeme tento postup $(k-1)$krát)

3) je-li $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n\}$ fundamentální systém řešení soustavy (2), je obecné řešení homogenní soustavy (2) ve tvaru

$$\mathbf{y}_H = c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2 + \cdots + c_n\mathbf{y}_n$$

3) řešíme-li Cauchyho úlohu, určíme konstanty $c_1, c_2, \dots, c_n$ tak, aby byly splněny počáteční podmínky

Příklad 44

Nalezněte řešení soustavy:

(a)

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{y},$$

(b)

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 5 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

s počáteční podmínkou $\mathbf{y}(0) = (7, 14, 3)^T$,

(c)

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y}.$$

Nehomogenní SOLDR 1. řádu s konstantními koeficienty

– uvažujeme soustavu $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}$, tj. $\mathbf{y}' - \mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{b}$

Jak řešit nehomogenní SOLDR 1. řádu s konstantními koeficienty?

1) nalezneme obecné řešení $\mathbf{y}_H$ přidružené homogenní SOLDR $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$
2) nalezneme partikulární řešení $\mathbf{y}_P$ nehomogenní SOLDR $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}$, přičemž předpokládáme speciální pravou stranu $\mathbf{b}$ podobně jako v případě ODR s konstantními koeficienty, tj. všechny složky vektoru $\mathbf{b}$ uvažujeme stejného typu

„exponenciála · polynom“

i) je-li vektor $\mathbf{b}$ tvaru $\mathbf{b}(x) = \mathbf{P}_r(x)$ neboli $\mathbf{b}(x) = e^{0x}\mathbf{P}_r(x)$, kde složky vektoru $\mathbf{P}_r$ jsou (obecně komplexní) polynomy stupně nejvýše r-tého, pak:

$$\mathbf{y}_P = \begin{cases} \mathbf{R}_r(x) & \text{pokud 0 není kořenem char. polynomu matice } \mathbf{A}, \\ \mathbf{R}_{r+k}(x) & \text{pokud 0 je } k\text{-násobným kořenem char. pol. mat. } \mathbf{A}, \end{cases}$$

kde $\mathbf{R}_r$, resp. $\mathbf{R}_{r+k}$ je vektor, jehož složky jsou polynomy stupně nejvýše r-tého, resp. $(r+k)$-tého

ii) je-li vektor $\mathbf{b}$ tvaru $\mathbf{b}(x) = e^{\lambda x}\mathbf{P}_r(x)$, kde složky vektoru $\mathbf{P}_r$ jsou (obecně komplexní) polynomy stupně nejvýše r-tého, pak:

$$\mathbf{y}_P = \begin{cases} e^{\lambda x}\mathbf{R}_r(x) & \text{pokud } \lambda \text{ není kořenem char. pol. mat. } \mathbf{A}, \\ e^{\lambda x}\mathbf{R}_{r+k}(x) & \text{pokud } \lambda \text{ je } k\text{-násobným kořenem char. pol. mat. } \mathbf{A}, \end{cases}$$

kde $\mathbf{R}_r$, resp. $\mathbf{R}_{r+k}$ je vektor, jehož složky jsou polynomy stupně nejvýše r-tého, resp. $(r+k)$-tého

3) obecné řešení nehomogenní soustavy $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}$ je ve tvaru

$$\mathbf{y}_O = \mathbf{y}_H + \mathbf{y}_P$$

Příklad 45

Nalezněte řešení soustavy:

(a)

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-x}, \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

(b)

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} -x^2 \\ 2x \end{pmatrix},$$

(c)

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-x}.$$