Příklady pro předmět Aplikovaná matematika (AMA) – část 1

1. **Lokální extrémy funkcí dvou a tří proměnných**

Nalezněte lokální extrémy funkcí:

(a) $f_1 : f_1(x, y) = x^3 - 3x + y^2 + 2y$
(b) $f_2 : f_2(x, y) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x + y^2$
(c) $f_3 : f_3(x, y, z) = x^3 + y^3 - 6xy + z^2$
(d) $f_4 : f_4(x, y, z) = x^3 + y^2 + \dfrac{1}{2}z^2 - 3xz - 2y + 2z$
(e) $f_5 : f_5(x, y) = \dfrac{1}{3}x^3 - y^2x + y^2$

Řešení:

(a) Nejprve najdeme tzv. podezřelé body, musíme spočítat první derivace a zjistit, kdy se rovnají nule:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3 = 0$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = 2y + 2 = 0$$

Z derivace podle x dostáváme $x_1 = 1$ a $x_2 = -1$ a z derivace podle y máme $y = -1$. Dostáváme tak dva podezřelé body: $P_1 = [1, -1], P_2 = [-1, -1]$. Pro vyšetření typu extrému (a toho, zda vůbec nastává) spočítáme druhé derivace:

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}(x, y) = 6x,$$
$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}(x, y) = 2,$$
$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y}(x, y) = 0.$$

Z těchto derivací sestavíme determinaty:

$$D_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 12x,$$

$$D_1 = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} = 6x.$$

V bodě P_1 je $D_2 > 0$ a $D_1 > 0$, v tomto bodě má tedy funkce f_1 lokální minimum. V bodě P_2 lokální extrém není, protože $D_2 < 0$.

(b) Podezřelé body: $P_1 = [3, 0], P_2 = [2, 0]$. V bodě P_1 je lok. minimum, v P_2 lok. extrém není.

(c) Podezřelé body: $P_1 = [2, 2, 0], P_2 = [0, 0, 0]$. V bodě P_1 je lok. minimum, v P_2 lok. extrém není.

(d) Podezřelé body: $P_1 = [2, 1, 4], P_2 = [1, 1, 1]$. V bodě P_1 je lok. minimum, v P_2 lok. extrém není.

(e) Podezřelé body: $P_1 = [0, 0], P_2 = [1, 1]$ a $P_3[1, -1]$. V žádném z nalezených bodů nenastává lokální extrém. V bodě P_1 nemůžeme rozhodnout na základě znamének determinantů (vyjdou nula). Omezíme-li se např. na $y = 0$, dostaneme $f_5(x, 0) = \frac{1}{3}x^3$ a vidíme, že už tato část grafu f_5 existenci lokálního extrému vylučuje.

Extrémy funkcí dvou proměnných na kompaktní množině:

(a) Nalezněte (globální) extrémy funkce $g_1 : g_1(x, y) = 2x^2 - 4x + 3y^2 - 6y + 3$ na (uzavřené) množině A ohraničené trojúhelníkem s vrcholy $[0, 3], [0, -1]$ a $[3, 0]$.

(b) Nalezněte body s největší a nejmenší funkční hodnotou funkce $g_2 : g_2(x, y) = 1+x^2+y^2$ na množině $\langle -1, 1\rangle \times \langle -1, 1\rangle$. (Jedná se o čtverec s vrcholy $[-1, -1], [1, -1]$, $[1, 1]$ a $[-1, 1]$.)

(c) Nalezněte (globální) extrémy funkce $g_3 : g_3(x, y) = x^3 - 3x + y^3 - 3y$ na množině $\langle -2, 2\rangle \times \langle -2, 2\rangle$.

Řešení:

(a) Podezřelé body budeme hledat nejprve uvnitř množiny A (hledáme lokální extrémy). Spočítáme parciální derivace, položíme je rovny nule:

$$\frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y) = 4x - 4 = 0$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y) = 6y - 6 = 0$$

a dostáváme podezřelý bod $P_1 = [1, 1]$. (Z druhých parciálních derivací bychom poznali, že se jedná o lokální minimum.) Parciální derivace všude na A existují, takže uvnitř množiny další podezřelé body nejsou. Nyní vyšetříme hranici množiny A. Mezi podezřelé body můžeme hned zařadit vrcholy daného trojúhelníka: $P_2 = [0, 3], P_3 = [0, -1]$ a $P_4 = [3, 0]$. Dále musíme prověřit všechny strany. Strana s vrcholy $[0, 3], [0, -1]$ leží na přímce $x = 0$, označme ji jako stranu a. Dosadíme $x = 0$ do funkčního předpisu $g_1(x, y, z) = 2x^2 - 4x + 3y^2 - 6y + 3$ a dostáváme pomocnou funkci jedné proměnné y: $g_a(y) = 3y^2 - 6y + 3$. (Její graf vznikne z grafu funkce g_1 omezíme-li se v jejím definičním oboru na přímku $x = 0$). Hledáme extrém této pomocné funkce(tj. její derivaci položíme rovnu nule): $g_a'(y) = 6y - 6 = 0$, takže $y = 1$ a dostáváme další podezřelý bod $P_5 = [0, 1]$. Dále postupujeme analogicky: strana b s vrcholy $[0, 3], [3, 0]$ leží na přímce $y = 3 - x$, po dosazení dostáváme $g_b(x) = 5x^2 - 16x + 12$, derivaci položíme rovnu nule: $g_b'(x) = 10x - 16 = 0$ a dostáváme další podezřelý bod $P_6 = [\frac{16}{10}, \frac{14}{10}]$ ležící na straně b. Zbývá strana c určená vrcholy $[0, -1], [3, 0]$ ležící na přímce $y = \frac{1}{3}x - 1$. Po dosazení a úpravě:

$g_c(x) = \frac{7}{3}x^2 - 8 + 12$, $g_c'(x) = \frac{14}{3}x - 8 = 0$ a $x = \frac{12}{7}$. Poslední podezřelý bod je $P_7 = [\frac{12}{7}, \frac{-5}{7}]$. K nalezení extrémů stačí spočítat funkční hodnoty v nalezených podezřelých bodech a vybrat body s největší a nejmenší funkční hodnotou: $g_1(P_1) = -2$, $g_1(P_2) = 12$, $g_1(P_3) = 12$, $g_1(P_4) = 9$, $g_1(P_5) = 0$, $g_1(P_6) = -\frac{8}{10}$ a $g_1(P_7) = \frac{384}{49} \doteq 7{,}8$. Z toho vidíme, že funkce g_1 má na množině A dvě maxima: v bodech P_2 a P_3 s funkční hodnotou $g_1(P_2) = g_1(P_3 = 12$ a minimum v bodě P_1 s funkční hodnotou $g_1(P_1) = -2$.

(b) Minimum v bodě $[0,0]$, $g_2(0,0) = 1$, maximum ve vrcholech $[-1,-1], [1,-1]$, $[1,1]$ a $[-1,1]$, $g_2(1,1) = 3$.

(c) Minimum v bodech $[1,1]$, $[-2,1]$, $[-2,-2]$ a $[1,-2]$, ve všech těchto bodech je funkční hodnota rovna -4. Maximum je v bodech $[2,2], [-1,2]$, $[-1,-1]$ a $[2,-1]$ s funkční hodnotou 4.

2. Dvojný a trojný integrál

Spočítejte dvojné integrály:

(a) $I_1 = \iint_A \sin x \cdot y \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde množina A je obdélník $\langle 0, \pi\rangle \times \langle 0, 2\rangle$,

(b) $I_2 = \iint_B x^2\sqrt{y} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde množina B je obdélník $\langle 1, 2\rangle \times \langle 0, 4\rangle$,

(c) $I_3 = \iint_C (x+y) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde množina C je množina omezená křivkami $x = 0$, $y = x^2$, $x + y = 2$ pro $x \geq 0$,

(d) $I_4 = \iint_D \frac{x^2}{y^2} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde množina D je množina mezi křivkami $xy = 1$, $y = 4x$ a $x = 3$,

(e) $I_5 = \iint_E \frac{1}{x^2+1} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde množina E je množina mezi $y = 2x - x^2$ a $y = -x$.

Řešení:

(a) Meze pro integraci jsou $0 \leq x \leq \pi$ a $0 \leq y \leq 2$, protože obě proměnné mají konstantní meze, je pořadí integrace ve dvojnásobném integrálu libovolné, budeme integrovat nejprve např. podle x:

$$I_1 = \iint_A \sin x \cdot y \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^2 [\int_0^\pi \sin x \cdot y \, \mathrm{d}x]\mathrm{d}y,$$

Vnitřní integrál je podle x, y se bere jako konstanta:

$$\int_0^2 [\int_0^\pi \sin x \cdot y \, \mathrm{d}x]\mathrm{d}y = \int_0^2 [y \cdot \int_0^\pi \sin x \, \mathrm{d}x]\mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^2 y \cdot [-\cos x]_0^\pi \mathrm{d}y = \int_0^2 2y\mathrm{d}y = [y^2]_0^2 = 4.$$

(b) Meze pro integraci jsou $1 \leq x \leq 2$ a $0 \leq y \leq 4$. Integrál $I_2 = \frac{112}{9}$.

(c) Integrační obor C popíšeme jako obrazec typu I: $0 \leq x \leq 1$ a $x^2 \leq y \leq 2 - x$. $I_3 = \dfrac{89}{60}$.

(d) Integrační obor D je výhodnější popsat jako obrazec typu I: $\dfrac{1}{2} \leq x \leq 3$ a $\dfrac{1}{x} \leq y \leq 4x$. $I_4 = \dfrac{1225}{64}$.

(e) Integrační obor E: $0 \leq x \leq 3$, $-x \leq y \leq 2x - x^2$. $I_5 = \dfrac{3}{2} \ln 10 + \arctan 3 - 3$.

Spočítejte trojné integrály:

(a) $I_1 = \iiint_A (x + yz) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde množina $A = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 2\rangle$.

(b) $I_2 = \iiint_B y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, množina B je množina mezi rovinami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ a $x + 2y + z = 4$.

(c) $I_3 = \iiint_C (1 - 2x) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde C je množina mezi rovinami $x = 0$, $x = 2$, $y = 1$, $z = 0$ a $z = y$.

Řešení:

(a) Množina A je kvádr, meze pro integraci přes A jsou proto $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ a $0 \leq z \leq 2$. Integrál převedeme na trojnásobný integrál, integrovat můžeme v libovolném pořadí např. takto:

$$I_1 = \iiint_A (x + yz) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^2 \{\int_0^1 [\int_0^1 (x + yz)\mathrm{d}x]\mathrm{d}y\}\mathrm{d}z.$$

Postupně budeme počítat vnitřní integrály, nejdříve:

$$\int_0^1 (x + yz)\mathrm{d}x = [\frac{x^2}{2} + xyz]_0^1 = \frac{1}{2} + yz.$$

Tento výsledek následně integrujeme podle proměnné y v mezích od 0 do 1:

$$\int_0^1 (\frac{1}{2} + yz)\mathrm{d}y = [\frac{1}{2}y + \frac{y^2}{2}z]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z.$$

Třetí integrace je podle proměnné z v mezích od 0 do 2. Tento poslední, vnější integrál nám již dá výslednou hodnotu trojného integrálu I_1:

$$\int_0^2 (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}z)\mathrm{d}z = [\frac{1}{2}z + \frac{1}{4}z^2]_0^2 = 1 + 1 = 2 = I_1.$$

(b) Meze pro integraci přes množinu $B : 0 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 2 - \dfrac{1}{2}x$ a $0 \leq z \leq 4 - x - 2y$ (možné jsou i jiné varianty). $I_2 = \dfrac{8}{3}$.

(c) Meze pro integraci přes množinu $C : 0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 1$ a $0 \leq z \leq y$. $I_3 = -1$.

Pomocí polárních souřadnic spočtěte následující integrály:

(a) $I_1 = \iint_A \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde množina A je horní polovina kruhu o poloměru tři a se středem v počátku.

(b) $I_2 = \iint_B (1+x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde množina B je množina ohraničená kružnicemi $x^2+y^2=1$ a $x^2+y^2=4$.

(c) $I_3 = \iint_C \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde množina C je kruh $(x-1)^2+y^2 \leq 1$.

Řešení:

(a) Protože integrační obor A je horní polovina kruhu, hodí se pro jeho popis polární souřadnice. Zavedeme substituci $x = \varrho\cos\varphi$ a $y = \varrho\sin\varphi$ a v nových souřadnicích ϱ a φ popíšeme množinu A: $0 \leq \varrho \leq 3$ a $0 \leq \varphi \leq \pi$. Máme vše připraveno pro substituci:

$$I_1 = \iint_A \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_A \sqrt{(\varrho\cos\varphi)^2+(\varrho\sin\varphi)^2}\varrho\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi = \iint_A \varrho^2\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi,$$

a vniklý integrál spočítáme:

$$\iint_A \varrho^2\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi = \int_0^\pi [\int_0^3 \varrho^2\,\mathrm{d}\varrho]\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^\pi [\frac{1}{3}\varrho^3]_0^3\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^\pi 9\,\mathrm{d}\varphi = 9\pi.$$

(b) Meze pro množinu B: $1 \leq \varrho \leq 2$ a $0 \leq \varphi < 2\pi$. $I_2 = 3\pi$.

(c) Meze pro množinu C: $-\dfrac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}$ a $0 \leq \varrho \leq 2\cos\varphi$. Výpočet dává $I_3 = 4$, počítáme ovšem integrál, který podle definic, které používáme, neexistuje.

Aplikace dvojných a trojných integrálů

(a) Odvoďte vzorec pro výpočet obsahu kruhu s poloměrem R.

(b) Spočítejte obsah obrazce ohraničeného tzv. kardioidou, tj. křivkou s rovnicí $\rho = 1 + cos\varphi$, kde $\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle$.

(c) Nalezněte těžiště půlkruhové desky s poloměrem $R = 1$ a s konstantní hustotou $h(x,y) = 1$.

(d) Spočítejte objem tělesa ohraničeného plochami $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$ a $z=0$.

(e) Spočítejte hmotnost tělesa ohraničeného plochami $z = 4-x^2-y^2$ a $z=0$. Hustota tělesa je $h(x,y,z) = 5$.

(f) Spočítejte objem tělesa ohraničeného plochami $z = 4+x^2+y^2$, $x-y=1$, $x=0$, $y=0$ a $z=0$.

Řešení:

(a) $S = \pi R^2$.

(b) $S = \iint_K 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, ($K$ je zadaný obrazec), meze v polárních souřadnicích: $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ a $0 \leq \rho \leq 1 + cos\varphi$. $S = \dfrac{3}{2}\pi$.

(c) Desku interpretujeme jako množinu $x^2 + y^2 \le 1$ a $z \ge 0$. Protože hustota je konstatní a tento obrazec je symetrický podle osy y, je $x_T = 0$. Druhou souřadnici vypočteme takto: $y_T = \frac{1}{m} \iint_A y \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, ($A$ je daný půlkruh). Hmotnost m spočítáme jako $m = S \cdot h = \frac{\pi}{2}$ (hustota integrál (tzv. statický moment) je roven $I = \frac{2}{3}$. Po dosazení tedy $y_T = \frac{4}{3\pi}$.

(d) $V = \iiint_B 1 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde B je zadané těleso. Meze pro integraci jsou $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1 - x$ a $0 \le z \le 1 - x - y$ a integrál vyjde $V = \frac{1}{6}$. Lze počítat i bez použití integrace podle vzorce pro objem daného typu tělesa.

(e) $m = \iiint_C h(x, y, z) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_C 5 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde C je zadané těleso. Meze pro integraci ve válcových souřadnicích: $0 \le \rho \le 2$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ a $0 \le z \le 4 - \varrho^2$. Integrál dává $m = 40\pi$.

(f) $V = \iiint_D 1 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde D je zadané těleso. Meze pro integraci jsou $0 \le x \le 1$, $x - 1 \le y \le 0$ a $0 \le z \le 4 + x^2 + y^2$. $V = \frac{13}{6}$.

3. **Křivkový integrál (1. druhu)**

(a) $\int_a (x^2 + y^2) \, \mathrm{d}s$, kde křivka a je úsečka spojující body $[0, 0]$ a $[1, 1]$.

(b) $\int_b \frac{8y}{x} \, \mathrm{d}s$, kde křivka b je část grafu funkce $y = x^2$ mezi body $[1, 1]$ a $[2, 4]$.

(c) $\int_c \sqrt{(x^2 + y^2)} \, \mathrm{d}s$, kde c je kružnice se středem v počátku a s poloměrem 2.

(d) Spočítejte délku smyčky d zadané parametrickými rovnicemi $x = t^2$ a $y = t - \frac{t^3}{3}$ pro $t \in \langle -\sqrt{3}, \sqrt{3} \rangle$.

(e) Spočítejte délku jednoho závitu šroubovice e: $x = \cos(t)$, $y = \sin(t)$, $z = t$.

Řešení:

(a) Nejprve potřebujeme nalézt parametrické rovnice křivky, po které se integruje: $x = t$ a $y = t$ pro $t \in \langle 0, 1 \rangle$. Dále platí $\mathrm{d}s = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \, \mathrm{d}t = \sqrt{2} \, \mathrm{d}t$, kde tečka značí derivaci podle t. Do integrálu dosadíme za x, y a $\mathrm{d}s$ a dostaneme: $\int_a (x^2 + y^2) \, \mathrm{d}s = \int_0^1 2t^2 \sqrt{2} \, \mathrm{d}t = 2\sqrt{2} [\frac{t^3}{3}]_0^1 = \frac{2}{3}\sqrt{2}$.

(b) Parametrické rovnice pro křivku b: $x = t$ a $x = t^2$ pro $t \in \langle 1, 2 \rangle$. $\mathrm{d}s = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \, \mathrm{d}t = \sqrt{1 + 4t^2} \, \mathrm{d}t$ a $\int_b \frac{8y}{x} \, \mathrm{d}s = \int_1^2 8t\sqrt{1 + 4t^2} \, \mathrm{d}t = \frac{2}{3}(\sqrt{17^3} - \sqrt{5^3})$.

(c) Parametrické rovnice pro kružnici c jsou např. $x = 2\cos t$ a $y = 2\sin t$ pro $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$. $\mathrm{d}s = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \, \mathrm{d}t = \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t} \, \mathrm{d}t = 2 \, \mathrm{d}t$ a $\int_c \sqrt{(x^2 + y^2)} \, \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} 4 \, \mathrm{d}t = 8\pi$.

(d) Pro délku l platí: $l = \int_d 1 \, \mathrm{d}s = 4\sqrt{3}$.

(e) Délku křivky spočítáme jako $l = \int_d 1 \, \mathrm{d}s$. Počítáme délku jednoho závitu, vezmeme např. $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Jedná se o křivku v prostoru, takže platí: $\mathrm{d}s = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \, \mathrm{d}t = \sqrt{2} \, \mathrm{d}t$ a délka křivky vyjde po integraci $l = 2\sqrt{2}\pi$.

4. **Lineární diferenciální rovnice 1. řádu** Řešte následující rovnice:

(a) $y' + y = e^x$, $y(0) = 1$

(b) $y' - 2xy = 2x^3$, $y(0) = 2$

(c) $y' - \frac{1}{x}y = x$ pro $x \in (0, +\infty)$, $y(1) = 4$

(d) $y' + 2xy = e^x(2x + 1)$, $y(0) = 3$

(e) $y' + \sin x \cdot y = e^{\cos x}$, $y(0) = 1$

Řešení:

(a) Jedná se o rovnici s počáteční podmínkou, tzv. Cauchyovu úlohu. Řešit budeme ve třech krocích.
Nejprve vyřešíme homogenní rovnici $y' + y = 0$ tzv. separací proměnných. Použijeme zápis $y' = \dfrac{dy}{dx}$, takže máme rovnici $\dfrac{dy}{dx} + y = 0$ a upravujeme tak, aby na jedné straně rovnice byly členy obsahující y a na druhé straně členy obsahující proměnnou x (a dx a dy v čitateli)–tzv. separace. Dostáváme postupně

$$\frac{dy}{dx} = -y$$

$$dy = -y dx$$

$$\frac{dy}{y} = -dx.$$

V tuto chvíli můžeme obě strany integrovat:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int -\mathrm{d}x$$

a dostáváme $\ln|y| = -x + k$, $|y| = e^{-x+k} = e^{-x}e^k = ce^{-x}$, označili jsme $c = e^k$ (v tuto chvíli je tedy konstanta c kladná). Proto $y = ce^{-x}$, nyní ovšem $c \in \mathsf{R}$. Tím jsme vyřešili příslušnou homogenní rovnici a máme $y_H = ce^{-x}$. (Protože se jedná o rovnici s konstantními koeficienty, mohli jsme homogenní rovnici řešit i pomocí tzv. charakteristické rovnice.)
Druhý krok bude spočívat v nalezení tzv. partikulárního řešení rovnice se zadanou pravou stranou. Předvedeme řešení pomocí tzv. metody variace konstanty (protože jde o rovnici s konstantními koeficienty, lze použít i řešení pomocí speciální pravé strany). Předpokládáme, že partikulární řešení bude mít tvar stejný jako homogenní řešení, ovšem konstanta c bude nyní neznámá funkce, kterou budeme muset najít: $y_P = c(x)e^{-x}$. Neznámou funkci budeme hledat tak, že y_P dosadíme do naší rovnice. Dostáváme (y_P derivujeme jako součin) $c'e^{-x} - ce^{-x} + ce^{-x} = e^x$. Členy obsahující c se vždy musí odečíst. Zůstává $c'e^{-x} = e^x$, z čehož vyjádříme c': $c' = e^x e^x = e^{2x}$ a $c = \int c' \mathrm{d}x = \int e^{2x} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{2x}$. Hledáme jedno konkrétní řešení, takže integrační konstantu v posledním integrálu klademe rovnu nule. Když máme funkci $c = c(x)$, vrátíme se k partikulárnímu řešení a dosadíme: $y_P = ce^{-x} = \frac{1}{2}e^{2x}e^{-x} = \frac{1}{2}e^x$. Platí, že všechna řešení rovnice (bez počáteční podmínky, tzv. obecné řešení) jsou ve tvaru $y = y_H + y_P = ce^{-x} + \dfrac{1}{2}e^x$.

Protože máme zadanou počaáteční úlohu $y(0) = 1$, hledáme ještě hodnotu konstanty c tak, aby tato podmínka byla splněna. Do obecného řešení dosadíme $x = 0$ a $y = 1$ a máme $1 = c + \frac{1}{2}$, takže $c = \frac{1}{2}$ a řešení naší Cauchyovy úlohy je $y = \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}e^{x}$.

(b) $y = 3e^{x^2} - 1 - x^2$

(c) $y = 3x + x^2$

(d) $y = 2e^{-x^2} + e^x(2x + 1)$

(e) $y = \frac{1}{e}e^{\cos x} + xe^{\cos x}$

5. **Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty a speciální pravou stanou**

   (a) $y'' - 4y = 4x$

   (b) $y'' + y' - 2y = 3xe^x$

   (c) $y'' - 4y' + 4y = x^2$

   (d) $y''' - y' = e^{2x}$

   (e) $y'' + 9y = x^2 + 1$

   (f) $y'''' + y'' = 1$

   Řešení:

   (a) Nejprve řešíme homogenní rovnici $y'' - 4y = 0$. Vyřešíme tzv. charakteristickou rovnici $\lambda^2 - 4 = 0$, dostaneme kořeny $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = -2$. Na základě toho sestavíme řešení homogenní rovnice $y_H = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}$. Partikulární řešení rovnice s pravou stranou sestavíme podle vzorce ve tvaru $y_P = Ax + B$. Konstanty A a B zjistíme tak, že y_P dosadíme do rovnice a dostaneme $-4Ax - 4B = 4x$, odtud $A = -1$ a $B = 0$, takže $y_P = -x$ a všechna řešení naší rovnice mají tvar $y = y_H + y_P = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} - x$.

   (b) $y = c_1e^x + c_2e^{-2x} + e^x(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x)$

   (c) $y = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + \frac{1}{8}(2x^2 + 4x + 3)$

   (d) $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3 + \frac{1}{6}e^{2x}$

   (e) $y = c_1\cos 3x + c_2\sin 3x + \frac{1}{9}x^2 + \frac{7}{81}$

   (f) $y = c_1 + c_2x + c_3\cos x + c_4\sin x + \frac{1}{2}x^2$