PRIMITIVNÍ FUNKCE A NEURČITÝ INTEGRÁL

jakou funkci máme derivovat, aby výsledek byl $f(x) = x^2$?

$$F_1(x) = \frac{x^3}{3} \qquad F_2(x) = \frac{x^3}{3} + 1 \qquad F_3 = \frac{x^3}{3} + 17 \quad \text{atd.}$$

Funkci $F(x)$ nazveme primitivní funkcí k funkci $f(x)$ na intervalu (a,b), jestliže $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in (a,b)$

Jestliže $F(x)$ je primitivní funkcí k $f(x)$ na (a,b), je každá primitivní funkce k $f(x)$ na (a,b) ve tvaru $F(x) + c$, kde c je nějaká konstanta.

Výpočet primitivní funkce: vyjádření pomocí elementárních funkcí

Neurčitý integrál: množina všech primitivních funkcí:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c \qquad \left(F(x)' = f(x) \right)$$

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + c \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c \qquad x \in \mathbb{R}$$

$f(x)$	$F(x)$	
1	x	
x	$\frac{x^2}{2}$	
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$, n \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$x \in (0,+\infty)$ nebo $x \in (-\infty,0)$
$\sin x$	$-\cos x$	
$\cos x$	$\sin x$	
$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{arctg}\, x$	

$$\int 3x\,dx = 3\int x\,dx = 3\cdot\frac{x^2}{2} + c \quad, x \in \mathbb{R}$$

$$\int (x^3 - 5)\,dx = \int x^3\,dx - \int 5\,dx =$$

$$= \frac{x^4}{4} - 5x + c, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\int \left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right)dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx + \int x^{\frac{1}{3}}\,dx =$$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + c$$

$$x > 0$$

pro $x \in (0,+\infty)$ $\quad |x| = x \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + c$

pro $x \in (-\infty,0)$

$|x| = -x$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(-x) + c$$

Metoda per partes

$$(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$$

$$u\cdot v = \int u'\cdot v + \int u v'$$

$$\boxed{\int u\cdot v' = u\cdot v - \int u'\cdot v}$$

$$\int x\cdot e^x\,dx = x\cdot e^x - \int 1\cdot e^x\,dx = x\cdot e^x - e^x + C \quad , x\in\mathbb{R}$$

$$u = x \rightarrow u' = 1$$

$$v' = e^x \rightarrow v = e^x$$

$$\int x^2\cos x\,dx = x^2\sin x - \int 2x\sin x\,dx = x^2\sin x - \left(-2x\cos x + \int 2\cos x\,dx\right) =$$

$u = x^2$ $\quad u' = 2x$

$v' = \cos x$ $\quad v = \sin x$

$u = 2x$ $\quad u' = 2$

$v' = \sin x$ $\quad v = -\cos x$

$$= \underline{x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + c}$$

$\ln x \cdot \frac{1}{x}$ $\qquad x > 0$

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \ln^2 x - \int \frac{\ln x}{x}\,dx$$

per partes rovnice k oběma stranám $+\int \frac{\ln x}{x}\,dx$

$u = \ln x$ $\quad u' = \frac{1}{x}$

$v' = \frac{1}{x}$ $\quad v = \ln x$

$$2\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \ln^2 x \quad /:2$$

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\ln^2 x + c\,,\ x \in (0, +\infty)$$

$$\int \sin^2 x\,dx = -\sin x \cos x + \int \cos^2 x\,dx = -\sin x \cos x + \int (1-\sin^2 x)\,dx$$

$u = \sin x \quad u' = \cos x$

$v' = \sin x \quad v = -\cos x$

$$\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\int \sin^2 x\,dx = -\sin x \cos x + x - \int \sin^2 x\,dx \quad / + \int \sin^2 x\,dx$$

$$2\int \sin^2 x\,dx = -\sin x \cos x + x \quad / : 2$$

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{-\sin x \cos x + x}{2} + c \quad , x \in \mathbb{R}$$

$$\int 1\cdot \ln x\,dx = x\ln x - \int x\,\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - \int 1\,dx = x\ln x - x + c$$

$x \in (0,+\infty)$

$u = \ln x \qquad u' = \frac{1}{x}$

$v' = 1 \qquad v = x$

$$\int x e^x\,dx = e^x\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}e^x\,dx$$

$u = e^x \qquad u' = e^x$

$v' = x \qquad v = \frac{x^2}{2}$