Parciální derivace

Nechť $z = f(x,y)$ je funkce dvou proměnných s D_f

a $A = [a_1, a_2]$ je vnitřní bod D_f

Použijeme parciální funkce

$g_1(x) = f(x, a_2)$ – má-li $g_1(x)$ derivaci (podle x) pro $x = a_1$,

nazýváme tuto derivaci parciální derivace funkce $f(x,y)$

v bodě A * a značíme $\dfrac{\partial f(A)}{\partial x}$ (* podle x)

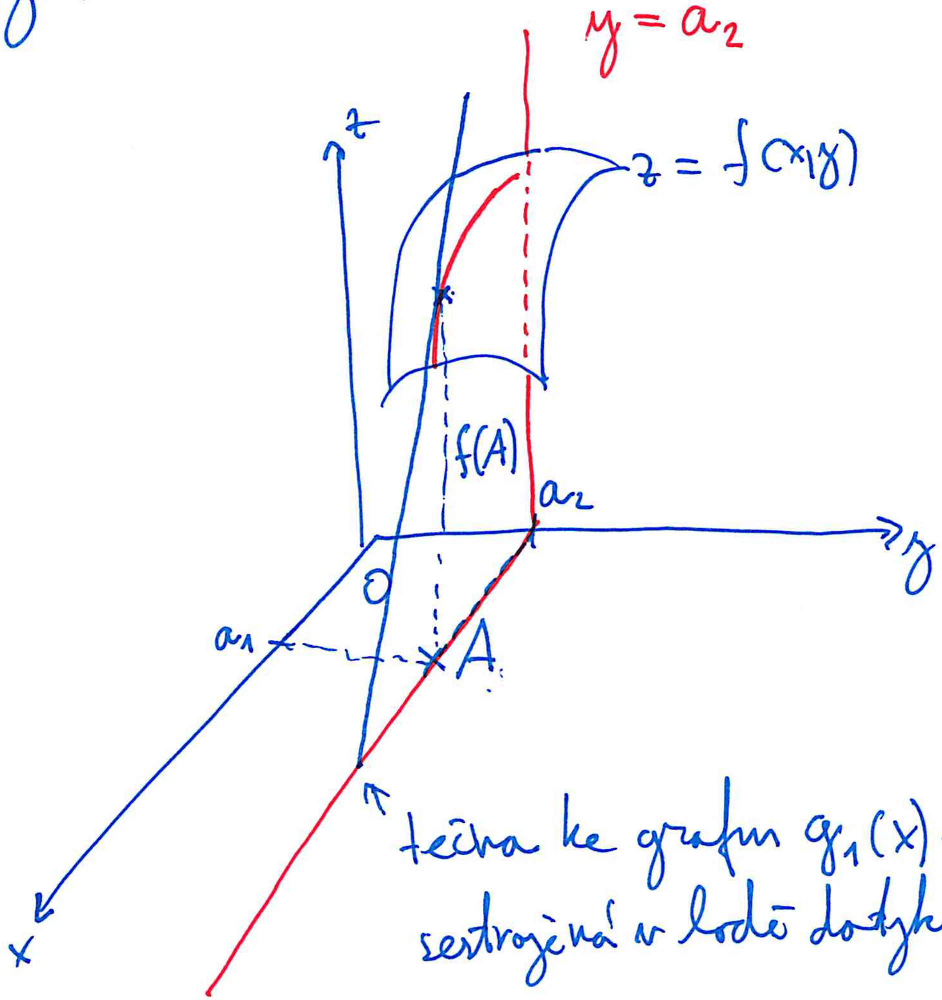
$g_2(y) = f(a_1, y)$ – má-li $g_2(y)$ derivaci (podle y) pro $y = a_2$,

nazýváme tuto derivaci parciální derivace funkce $f(x,y)$

v bodě A podle y a značíme $\dfrac{\partial f(A)}{\partial y}$

geometrický význam :

$A = [a_1, a_2]$



tečna ke grafu $g_1(x) = f(x, a_2)$
sestrojená v bodě dotyku $[a_1, a_2, f(A)]$

obecněji: funkce n proměnných $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ a

bod $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$

definujeme n parciálních funkcí:

$$g_i(x_i) = f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

a derivace $g_i(x_i)$ podle x_i pro $x_i = a_i$ je parciální derivace

funkce $z = f(x_1, \dots, x_n)$ v bodě A podle proměnné x_i

a značíme $\dfrac{\partial f(A)}{\partial x_i}$

Výpočet: $f(x,y) = x^3 y + y^2$, parciální derivace v bodě $A = [1,2]$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\,3x^2 = 3x^2 y \qquad \frac{\partial f(A)}{\partial x} = 3 \cdot 1^2 \cdot 2 = 6$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + 2y \qquad \frac{\partial f(A)}{\partial y} = 1^3 + 2 \cdot 2 = 5$$

gradient funkce f

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \operatorname{grad} f(A) = \left(\frac{\partial f(A)}{\partial x}, \frac{\partial f(A)}{\partial y}\right)$$

$$\operatorname{grad} f = \left(3x^2 y, x^3 + 2y\right) \qquad \operatorname{grad} f(A) = (6, 5)$$

$$g(x,y) = \frac{x \cdot y}{x^2+1} = y \cdot \frac{x}{x^2+1}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = y \, \frac{x^2+1 - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{x}{x^2+1}$$

$$h(x,y,z) = x^3 y^2 \sin(xz)$$

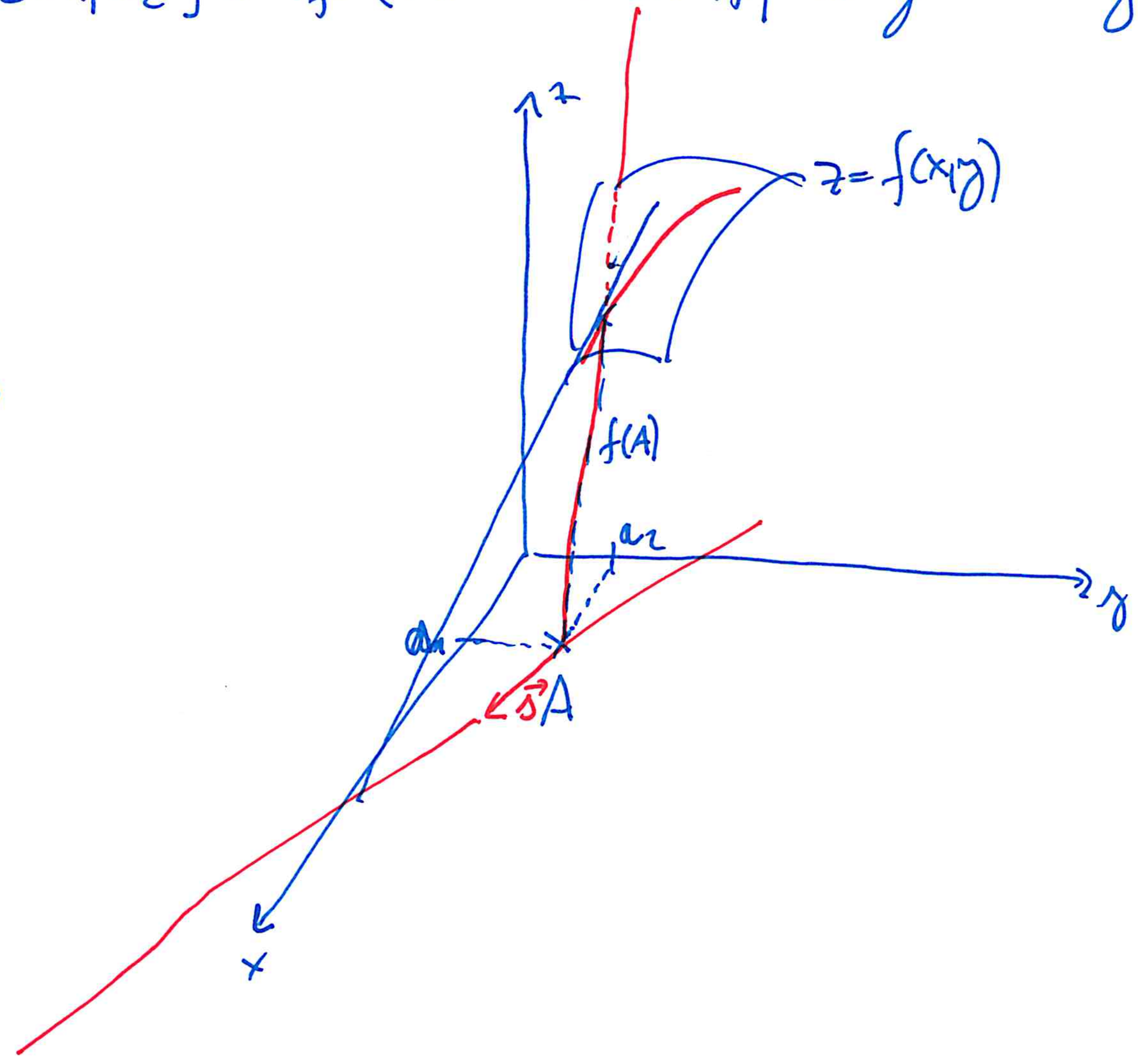
$$\frac{\partial h}{\partial x} = y^2\left(3x^{2} \sin(xz) + x^3 \cos(xz) z\right)$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = x^3 \sin(xz) \, 2y$$

$$\frac{\partial h}{\partial z} = x^3 y^2 \cos(xz) \cdot x$$

Směrová derivace

$z = f(x,y)$, bod $A = [a_1, a_2] \in D_f$ (vnitřní bod D_f) a jednotkový vektor $\vec{s} = (s_1, s_2)$



$$\frac{\partial f(A)}{\partial \vec{s}} = \operatorname{grad} f(A) \cdot \vec{s}$$

$\vec{s}$ je jednotkový vektor!

příklad: $f(x,y) = x^2 + xy + 2y^3$ derivaci v $A = [1,1]$ ve směru $\vec{s} = (3,4)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y \qquad \frac{\partial f(A)}{\partial x} = 3$$

$$\operatorname{grad} f(A) = (3,7)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + 6y^2 \qquad \frac{\partial f(A)}{\partial y} = 7$$

$$\|\vec{s}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \rightarrow \vec{s}_0 = \frac{1}{5}(3,4) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

$$\frac{\partial f(A)}{\partial \vec{s}} = \operatorname{grad} f(A) \cdot \vec{s}_0 = (3,7) \cdot \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = \frac{9}{5} + \frac{28}{5} = \underline{\underline{\frac{37}{5}}}$$

$$\frac{\partial f(A)}{\partial \vec{s}} = \operatorname{grad} f(A) \cdot \vec{s} = \|\operatorname{grad} f(A)\| \cdot \overbrace{\|\vec{s}\|}^{=1} \cdot \cos\varphi =$$

$$= \|\operatorname{grad} f(A)\| \cdot \cos\varphi$$

$\downarrow$

maximální hodnota směrové derivace $z = f(x,y)$ v bodě A nastane pro $\cos\varphi = 1$

tj když

$\vec{s} \parallel \operatorname{grad} f(A)$