Globální extrémy

Funkce f má v bodě A globální maximum vzhledem
minimum
k množině M, jestliže $f(X) \leq f(A)$ pro každé $X \in M$.
$f(X) \geq f(A)$

Spojitá reálná funkce definovaná na neprázdné omezené a uzavřené množině nabývá na této množině svého maxima a minima.

Extrémy hledáme v následujících bodech:

1) hraniční body definičního oboru

2) body, ve kterých jsou všechny existující parciální derivace rovny nule

→ Nalezneme všechny podezřelé body a z nich vybereme ty, ve kterých je funkční hodnota největší resp. nejmenší

$f(x,y) = x^2 - y^2$ na čtverci $\langle -1,1\rangle \times \langle -1,1\rangle$

1) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = -2y = 0$ $\rightarrow$ $P_1 = [0,0]$

$P_2 = [-1,-1]$

$P_3 = [-1,1]$

$P_4 = [1,1]$ $\quad P_5 = [1,-1]$

2) kranice

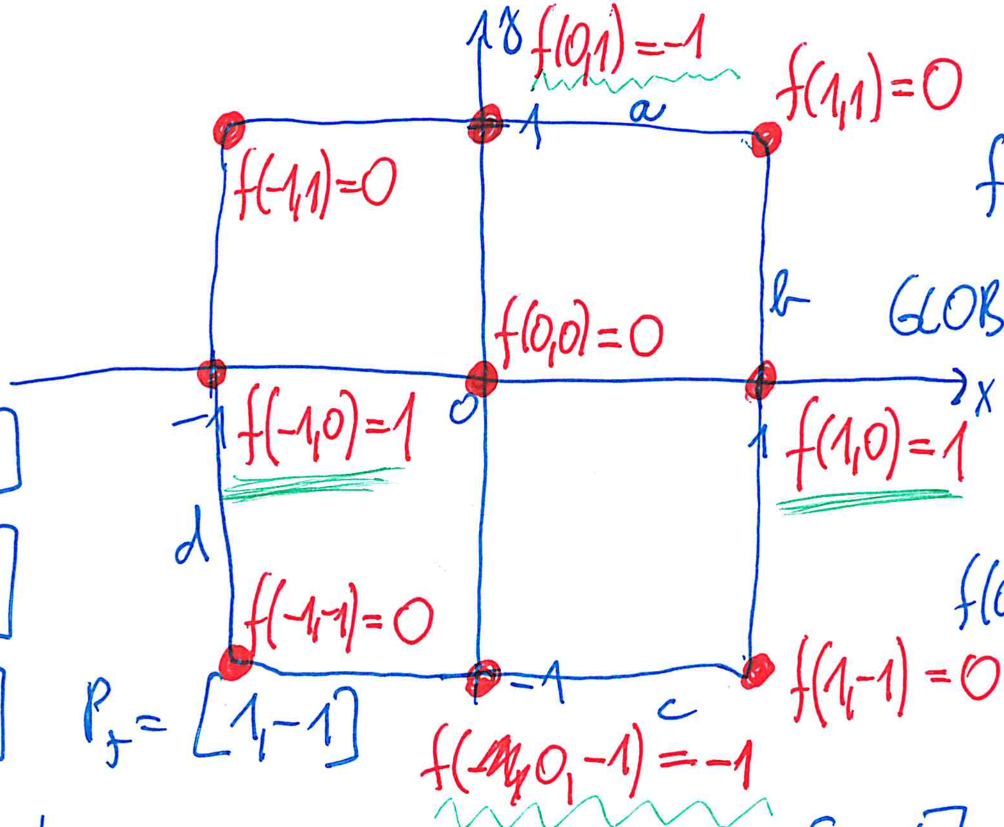
a) $y = 1$

$g_a(x) = f(x,1) = x^2 - 1 \qquad g_a'(x) = 2x = 0 \rightarrow x = 0 \qquad P_6 = [0,1]$

b) $x = 1 \qquad g_b(y) = f(1,y) = 1 - y^2 \qquad g_b'(y) = -2y = 0 \rightarrow y = 0 \qquad P_7 = [1,0]$

c) $y = -1 \qquad g_c(x) = f(x,-1) = x^2 - 1 \qquad g_c'(x) = 2x = 0 \rightarrow x = 0 \qquad P_8 = [0,-1]$

d) $x = -1 \qquad g_d(y) = f(-1,y) = 1 - y^2 \qquad g_d'(y) = -2y = 0 \rightarrow y = 0 \qquad P_9 = [-1,0]$



GLOB. MAXIMUM JE PRO $P_7 = [1,0]$

$P_9 = [-1,0]$

$f(1,0) = f(-1,0) = \underline{\underline{1}}$

GLOB. MINIMUM

$P_8 = [0,-1]$

$P_6 = [0,1]$

$f(0,1) = f(0,-1) = \underline{\underline{-1}}$

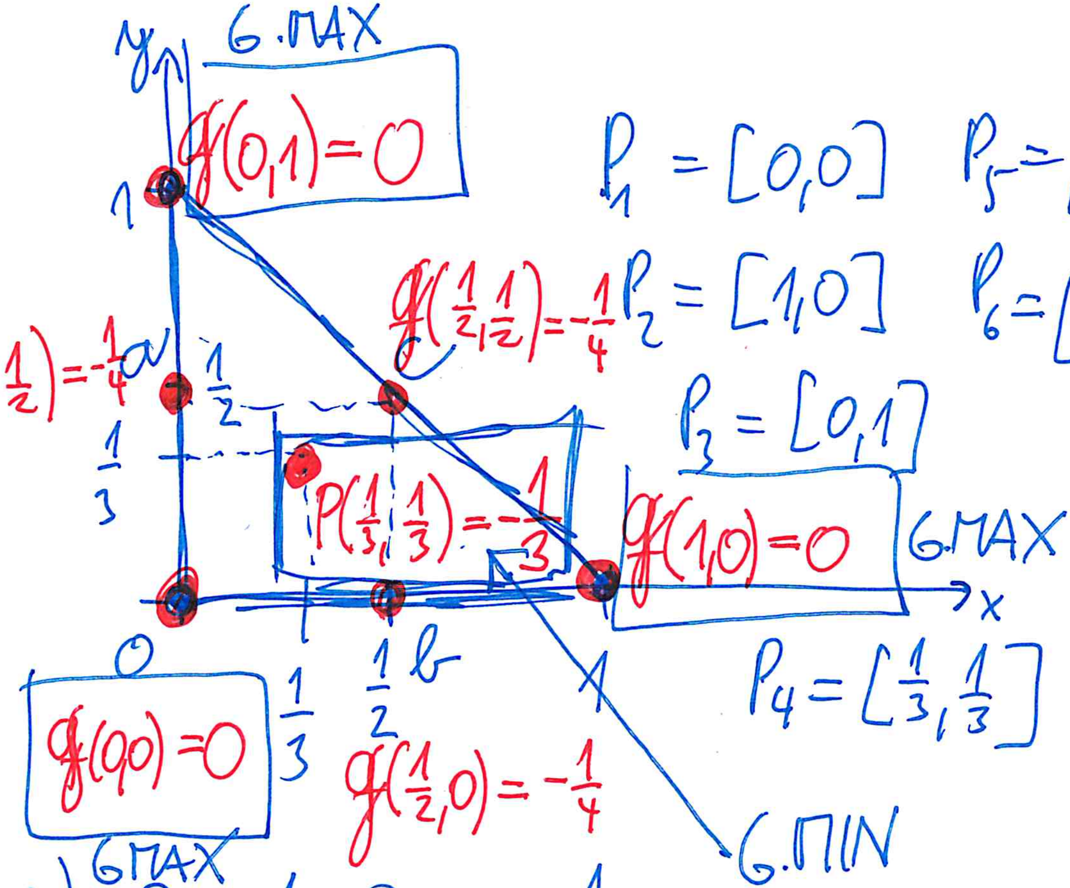
$z = g(x,y) = x^2 + y^2 + xy - x - y$ na $\triangle$ s $[0,0]$, $[1,0]$, $[0,1]$

1) $\frac{\partial g}{\partial x} = 2x + y - 1 = 0$

$\frac{\partial g}{\partial y} = 2y + x - 1 = 0 \quad / -2$

$-3y + 1 = 0$

$y = \frac{1}{3} \quad x = \frac{1}{3}$



$P_1 = [0,0] \quad P_5 = [0, \frac{1}{2}]$

$P_2 = [1,0] \quad P_6 = [\frac{1}{2}, 0]$

$P_3 = [0,1]$

$P_4 = [\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$

a) $x = 0$

$f_a(y) = g(0,y) = y^2 - y \quad f_a'(y) = 2y - 1 = 0 \rightarrow y = \frac{1}{2}$

b) $y = 0 \quad f_b(x) = g(x,0) = x^2 - x \quad f_b'(x) = 2x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$

c) $y = 1 - x \quad f_c(x) = g(x, 1-x) = x^2 + \underbrace{(1-x)^2}_{1-2x+x^2} + \underbrace{x(1-x)}_{x-x^2} - x - (1-x) = x^2 - x$

$f_c'(x) = 2x - 1 = 0$

$x = \frac{1}{2}$

$y = \frac{1}{2}$