Lineární DR 1. řádu

$$y' + a(x) \cdot y = b(x)$$

homogenní LDR 1. řádu

$$y' + a(x) \cdot y = 0$$

řešíme separací proměnných

příklad:

$$y' + 2xy = 0 \qquad (y=0 \text{ je vždy řešení})$$

$$y = e^x$$

$$\ln y = \ln e^x = x$$

$$e^{a+b} = e^a \cdot e^b$$

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 0 \qquad / -2xy$$

$$\frac{dy}{dx} = -2xy \qquad / \cdot dx,\ :y$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int -2x\,dx$$

$$\ln|y| = -x^2 + C_1 \qquad C_1 \in \mathbb{R}$$

$C_2 > 0$

$$|y| = e^{-x^2+C_1} = e^{-x^2} \cdot e^{C_1} = C_2 e^{-x^2}$$

$$\boxed{y = C e^{-x^2}}, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$y' - 3y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} - 3y = 0 \quad / + 3y$$

$$\frac{dy}{dx} = 3y \quad / : y \quad / \cdot dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 3\,dx$$

$$\ln|y| = 3x + c_1 \qquad c_1 \in \mathbb{R}$$

$$c_2 > 0$$

$$|y| = e^{3x+c_1} = e^{3x} \cdot e^{c_1} = c_2 \cdot e^{3x}$$

$$\boxed{y = c \cdot e^{3x}, \; c \in \mathbb{R}}$$

Řešení nehomogenní rovnice 1. řádu:

Všechna řešení rovnice $y' + a(x)\cdot y = b(x)$ (a, b jsou spojité na I) jsou funkce $y = y_H + y_P$, kde y_H jsou všechna řešení tzv. přidružené homogenní rovnice $y' + a(x)\cdot y = 0$ a y_P je nějaké jedno tzv. partikulární řešení zadané nehomogenní rovnice. Partikulární řešení hledáme tzv. metodou variace konstanty. ~~P~~ y_P hledáme ve "stejném" tvaru jako y_H, ale z konstanty c se stane funkce $c = c(x)$.

Příklady: $y' + y = e^{2x}$

1) $y' + y = 0$

$$\frac{dy}{dx} + y = 0 \quad /-y$$

$$\frac{dy}{dx} = -y \quad /\cdot dx \quad /:y$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int dx$$

$$\ln|y| = -x + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

$$|y| = e^{-x+c_1} = e^{-x}\cdot e^{c_1} = c_2 e^{-x}$$

$c_2 > 0$

$$y_H = C\cdot e^{-x}, \quad C \in \mathbb{R}$$

2) Hledáme y_p nehomogenní rovnice ve tvaru $y_p = C(x)\cdot e^{-x}$

$C(x)$ musíme zjistit dosazením do rovnice

$$y_p' = C'e^{-x} + C\cdot e^{-x}(-1)$$

$$C'e^{-x} - \cancel{Ce^{-x}} + \cancel{Ce^{-x}} = e^{2x}$$

$$C'e^{-x} = e^{2x} \quad /:e^{-x}$$

$$C' = \frac{e^{2x}}{e^{-x}} = e^{2x-(-x)} = e^{3x}$$

$$C = \int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}$$

$$y_p = \frac{1}{3}e^{3x}e^{-x}$$

$$y_p = \frac{1}{3}e^{2x}$$

$$\boxed{y = y_H + y_p = Ce^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x}, \quad C \in \mathbb{R}}$$

$$y' - 2xy = 2xe^{x^2} \quad , \; y(0) = 4$$

1) $y' - 2xy = 0$

$$\frac{dy}{dx} = 2xy \quad / : y \; / \cdot dx$$

$$\frac{dy}{y} = 2x\,dx$$

$$\ln|y| = x^2 + c_1 \qquad c_1 \in \mathbb{R}$$

$$|y| = e^{x^2 + c_1} = e^{x^2} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{= c_2 > 0} = c_2 e^{x^2}$$

$$y_H = c e^{x^2} \quad , \; c \in \mathbb{R}$$

2) $y_p = c \cdot e^{x^2}$ (c je teď funkce)

$$y_p' = c' e^{x^2} + c e^{x^2} \cdot 2x$$

dosadíme: $c' e^{x^2} \cancel{+ c e^{x^2} \cdot 2x} \cancel{- 2x c e^{x^2}} = 2x e^{x^2}$

$$c' \cancel{e^{x^2}} = 2x \cancel{e^{x^2}}$$

$$c' = 2x$$

$$c = \int 2x\,dx = x^2$$

$$y_p = x^2 e^{x^2}$$

obecné řešení: $\boxed{y = y_H + y_p = c \cdot e^{x^2} + x^2 e^{x^2}}$

3) $4 = c \cdot 1 + 0 \rightarrow c = 4$

$$\boxed{y = 4e^{x^2} + x^2 e^{x^2} = e^{x^2}(4 + x^2)}$$

$$y' - \frac{1}{x} y = x \quad \text{pro } x \in (0, +\infty)$$

1) $y' - \frac{1}{x} y = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad / : y / \cdot dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = \ln x + c_1$$

$$|y| = e^{\ln x + c_1} = \underbrace{e^{\ln x}}_{=x} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c_2 > 0} = c_2 \cdot x$$

$$y_H = c\, x, \quad c \in \mathbb{R}$$

2) $y_p = c \cdot x$ (c je teď funkce)

$$y_p' = c' x + c$$

dosazení: $c' x + \cancel{c} - \frac{1}{\cancel{x}} \cancel{c \cdot x} = x$

$$c' \cancel{x} = \cancel{x}$$

$$c' = 1$$

$$c = x$$

$$y_p = x \cdot x = x^2$$

$$\boxed{y = y_H + y_p = cx + x^2}$$

$y' + 3x^2 y = x^2, \; y(0)=0$

1) $y' + 3x^2 y = 0$

$\frac{dy}{dx} = -3x^2 y \;/ : y \;/ \cdot dx$

$\int \frac{dy}{y} = -\int 3x^2 dx$

$\ln|y| = -x^3 + c_1, \; c_1 \in \mathbb{R}$

$|y| = e^{-x^3 + c_1} = e^{-x^3} \cdot e^{c_1} = c_2 e^{-x^3}$ $\quad e^{c_1} = c_2 > 0$

$y_H = c e^{-x^3}, \; c \in \mathbb{R}$

2) $y_p = c e^{-x^3}$ $\quad y_p' = c' e^{-x^3} - c e^{-x^3} \cdot 3x^2$

dosazení: $c' e^{-x^3} \cancel{- c e^{-x^3} 3x^2} \cancel{+ 3x^2 c e^{-x^3}} = x^2$

$c' e^{-x^3} = x^2 \;/ : e^{-x^3}$

$c' = e^{x^3} \cdot x^2$

$c = \int e^{x^3} x^2 dx = \frac{1}{3} \int e^t dt = \frac{1}{3} e^{x^3}$

$t = x^3$

$dt = 3x^2 dx$

$\frac{1}{3} dt = \underline{x^2 dx}$

$y_p = \frac{1}{3} e^{x^3} e^{-x^3} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$

obecné řešení: $y = y_H + y_p = \underline{c e^{-x^3} + \frac{1}{3}}$

3) $y(0) = 0: \; 0 = c \cdot e^0 + \frac{1}{3} \rightarrow c = -\frac{1}{3} \rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{3} e^{-x^3} + \frac{1}{3}}$