1 Euklidovský prostor

Pro potřeby zpracování více čísel najednou zavádíme pojem uspořádané n-tice. Uspořádaná n-tice je tvořena reálnými čísly $x_1, x_2, \ldots, x_n$, která zapisujeme do hranaté závorky: $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Slovo uspořádaná v názvu znamená, že nám záleží na pořadí. $[1, 2, 3]$ je uspořádaná trojice, $[3, 2, 1]$ je jiná uspořádaná trojice – čísla mají jiné pořadí. Dvě uspořádané n-tice se rovnají, pokud se rovnají všechna čísla na odpovídajících si pozicích. Z podmínky pro dvojice $[x, y] = [1, 2]$ plyne $x = 1$ a $y = 2$. Množině všech n-tic reálných čísel budeme říkat n-rozměrný prostor, jednotlivým n-ticím budeme říkat body n-rozměrného prostoru: $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se nazývají souřadnice bodu X.

Dvourozměrný prostor nazýváme rovina, body v rovině i v geometrii nebo v lineární algebře běžně stotožňujeme s dvojicemi čísel, např. $A = [1, 2]$. V dvourozměrném a trojrozměrném prostoru je užitečná geometrická představa, na druhou stranu budeme běžně pracovat i s vícerozměrnými prostory, kde už taková přímočará geometrická představa možná není. To ale nevadí, body např. pětirozměrného prostoru jsou pro nás uspořádané pětice čísel, "obrázek"k tomu nepotřebujeme.

Pro další použití budeme potřebovat do n-rozměrného prostoru závést měření vzdálenosti. V rovině měření vzdálenosti dvou bodů souvisí s Pythagorovou větou. Vzdálenost bodů $X = [x_1, x_2]$ a $Y = [y_1, y_2]$ značíme $d(X, Y)$ a platí $d(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$. Nakreslete si obrázek! Tento vztah zobecníme a v n-rozměrném prostoru počítáme vzdálenost bodů $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ a $Y = [y_1, y_2, \ldots, y_n]$ jako

$$d(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_2)^2}.$$

n-rozměrný prostor vybavený měřením vzdálenosti nazýváme n-rozměrný Euklidovský prostor a značíme E_n. E_1 si můžeme představovat jako přímku s běžným měřením vzdálenosti, E_2 jako rovinu a E_3 jako běžný trojrozměrný prostor.

2 Vektory

Kromě bodů budeme pracovat také s veličinami, které jsou kromě své velikosti charakterizovány také směrem, jsou to tzv. vektory (ty bychom měli znát z geometrie nebo z fyziky). Vektor určují dvojice bodů: bod, ve kterém vektor začíná, a bod, ve kterém vektor končí. Vektor si můžeme představovat jako "šipku"(orientovanou úsečku) z počátečního bodu do koncového bodu.

Budeme pracovat s tzv. volnými vektory. Vektor můžeme libovolně posunout a pořád se bude jednat o stejný vektor – bude mít stejnou velikost i směr. Různé dvojice bodů tedy můžou určovat stejný vektor. Body $A = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ a $B = [b_1, b_2, \ldots, b_n]$ určují stejný vektor jako body $C = [c_1, c_2, \ldots, c_n]$ a $D = [d_1, d_2, \ldots, d_n]$, jestliže platí $b_1 - a_1 = d_1 - c_1$, $b_2 - a_2 = d_2 - c_2$, $\ldots$, $b_n - a_n = d_n - c_n$. Tyto rozdíly se nazývají souřadnice vektoru. Také vektor tedy můžeme zapisovat jako uspořádané n-tice čísel. Přikládáme jim ale trochu jiný význam. Abychom vektory odlišili od bodů, zapisujeme jejich souřadnice do kulatých závorek. Vektory značíme tučně $\boldsymbol{x}$, v ručně psaném textu označujeme šipkou: $\vec{x}$, a píšeme tedy $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Pro vektor z počátečního bodu $A = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ do koncového bodu $B = [b_1, b_2, \ldots, b_n]$ dostáváme $\boldsymbol{x} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, \ldots, b_n - a_n)$. Symbolicky také píšeme $\boldsymbol{x} = B - A$. Rozdílem bodů $B - A$ tedy rozumíme vektor, který směřuje z bodu A do bodu B.

2.1 Příklady

1. Nalezněte souřadnice vektoru směřujícího z bodu $A = [3, 1, 1]$ do bodu $B = [5, 5, 0]$.

   Hledaný vektor získáme jako $\boldsymbol{x} = B - A = [5, 5, 0] - [3, 1, 1] = (2, 4, -1)$.

2. Jsou vektory z $C = [7, 1]$ do $D = [6, 2]$ a z $E = [2, 3]$ do $F = [1, 4]$ stejné?

   $\boldsymbol{y} = D - C = (-1, 1)$ a $\boldsymbol{z} = F - E = (-1, 1)$, takže $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}$. Nakreslete si obrázek.

3. Nalezněte souřadnice vektoru směřujícího z bodu $X = [1, 1, 1, 1, 1]$ do bodu $Y = [4, 5, 0, 7, -1]$.

   Hledaný vektor získáme jako $\boldsymbol{a} = Y - X = [4, 5, 0, 7, -1] - [1, 1, 1, 1, 1] = (3, 4, -1, 6, -2)$.

Vektory (patřící do stejného prostoru) můžeme sčítat a to tzv. po složkách: $(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n)$. Takže např. $(1, 1, 1, 1)+(1, 2, 3, 5) = (2, 3, 4, 6)$. Ve stejném duchu funguje i násobení vektoru číslem (tzv. skalárem): $\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$. Spočítejme třeba $5(1, 2, 3, 4) = (5, 10, 15, 20)$.

Velikost vektoru $\boldsymbol{x}$ označíme $||\boldsymbol{x}||$ definujeme jako vzdálenost jeho krajních bodů, pro vektor $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tedy platí

$$||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Vektory, které mají velikost 1, se nazývají jednotkové. Existuje jediný vektor, který má velikost nula. Je to tzv. nulový vektor $\boldsymbol{o} = (0, 0, \ldots, 0)$. Často budeme k zadanému vektoru potřebovat vektor stejného směru (a orientace), který bude jednotkový. Vektor $\boldsymbol{a} = (5, 12)$ není jednotkový: $||\boldsymbol{a}|| = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$. Když ho vynásobíme $\frac{1}{13}$ (převrácená hodnota velikosti) dostaneme vektor $\dfrac{1}{13}(5, 12) = \left(\dfrac{5}{13}, \dfrac{12}{13}\right)$. Velikost tohoto vektoru je $\sqrt{\left(\dfrac{5}{13}\right)^2 + \left(\dfrac{12}{13}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{5^2 + 12^2}{13^2}} = \sqrt{\dfrac{169}{169}} = 1$. Zapamatujme si, že jednotkový vektor stejného směru, jako má daný vektor $\boldsymbol{a}$, spočítáme

$$\boldsymbol{a}_0 = \frac{1}{||\boldsymbol{a}||}\boldsymbol{a}.$$

K měření vektorů má velmi blízko tzv. skalární součin vektorů. Skalární se mu říká proto, že výsledkem je číslo–skalár. Pro vektory $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ definujeme

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

Pro vektory $\boldsymbol{x} = (1, 2, 3, -4)$ a $\boldsymbol{y} = (2, 2, 2, 2)$ počítáme $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = 1\cdot2+2\cdot2+3\cdot2-4\cdot2 = 2+4+6-8 = 4$. Všimněme si, že platí: $||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}}$. Pomocí skalárního součinu můžeme definovat také odchylku nenulových vektorů jako číslo $\varphi \in \langle 0, \pi\rangle$, pro které platí

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}}{||\boldsymbol{x}|| \cdot ||\boldsymbol{y}||}.$$

Protože $\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$ a jmenovatel být nula nemůže, jsou dva vektory $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ kolmé, jestliže $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 0$.

3 Funkce n-proměnných

Pro přirozené číslo n a množinu D ležící v prostoru E_n definujeme funkci n-proměnných na množině D jako předpis, který každému bodu $X \in D$ přiřadí reálné číslo z. Pro $X = [x_1, x_2, \ldots x_n]$ zapisujeme $z = f(X)$ nebo $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Speciálně pro $n = 2$ píšeme $z = f(x, y)$ a pro $n = 3$ zapisujeme $u = f(x, y, z)$. Pro $n = 1$ dostáváme "klasické"funkce jedné proměnné $y = f(x)$. Pro $n > 3$ už pak nepoužíváme různá písmena abecedy, ale indexované $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Množina D se nazývá definiční obor funkce. Množina všech z, pro které existuje $X \in D$ takové, že $z = f(X)$, se nazývá obor hodnot funkce.

Graf funkce n-proměnných $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je množina bodů $[x_1, x_2, \ldots, x_n, f(X)]$ pro $X \in D$ resp. její grafické znázornění. Povšimněme si ale, že pro grafické znázornění funkce n proměnných potřebujeme $n + 1$ rozměrný prostor. O grafech budeme tedy hovořit pouze pro $n = 1$ (jde o grafy funkce jedné proměnné, které kreslíme do roviny–2-rozměrný prostor) a pro $n = 2$. Tyto grafy budeme kreslit do prostoru: každému bodu v rovině $[x, y]$ přiřazujeme třetí hodnotu: funkční hodnotu $z = f(x, y)$, kterou vynášíme na osu z. Více o funkcích dvou proměnných a jejich grafech pojednáme ve video přednášce. Pro $n = 3$ už je graf čtyřrozměrný a nebudeme se tím tedy zabývat.

Pro studium funkcí více proměnných jsou užitečné (jak záhy uvidíme) tzv. parciální funkce. Jedná se o funkce jedné proměnné, ty dobře známe, víme jaké mají grafy a jak se derivují. Pro funkci $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a bod $A = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ jejího definičního oboru definujeme parciální funkce takto: $f_1(x_1) = f(x_1, a_2, \ldots, a_n)$, $f_2(x_2) = f(a_1, x_2, a_3, \ldots, a_n)$, $\ldots$, $f_n(x_n) = f(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, x_n)$. Do původní funkce n-proměnných dosadíme za všechny proměnné kromě jedné souřadnice zadaného bodu a dostaneme tak funkci jedné proměnné. Např. pro $f(x, y, z) = x^2 y + y^2 z$ a bod $A = [1, 3, 2]$ dostaneme parciální funkce:

$$f_x(x) = f(x, 3, 2) = x^2 3 + 3^2 2 = 3x^2 + 18,$$

$$f_y(y) = f(1, y, 2) = 1^2 y + y^2 2 = y + 2y^2,$$

$$f_z(z) = f(1, 3, z) = 1^2 3 + 3^2 z = 3 + 9z.$$

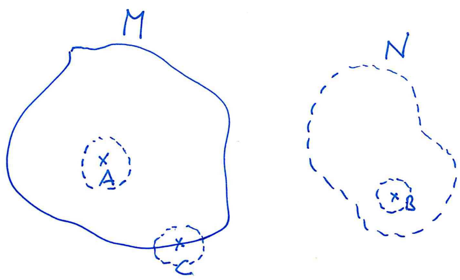
Výsledný tvar záleží jak na zadané funkci f, tak i na volbě bodu A.

%

4 Okolí bodu, otevřená a uzavřená množina

Okolím bodu $A \in E_n$ s poloměrem δ rozumíme množinu všech bodů $X \in E_n$ jejichž vzdálenost je od bodu A menší než δ: $\{X \in E_n : d(A,X) < \delta\}$. Pro $n = 1$ je okolím bodu a na číselné ose otevřený interval $(a - \delta, a + \delta)$. Pro $n = 2$ je okolím bodu A v rovině vnitřek kruhu o poloměru δ se středem v A a pro $n = 3$ je okolím bodu A v prostoru vnitřek koule se středem A s poloměrem δ. Okolí bodu používáme k popisu vztahu polohy bodu vůči množině: Bod A je vnitřní bod množiny M, jestliže existuje okolí bodu A takové, že celé toto okolí patří do množiny M. (Viz obrázek: A je vnitřní bod množiny M, B je vnitřní bod množiny N, B a C nejsou vnitřní body množiny M. Čárkovaná čára není součástí množiny, kterou ohraničuje.) Množina, jejíž každý bod je vnitřní, se nazývá otevřená. Množina M na obrázku otevřená není, protože $B \in M$ není vnitřní. Množina N stejně jako všechna naznačená okolí jsou otevřené množiny.

Bod B je hraniční bod množiny M, jestliže každé okolí bodu B obsahuje body množiny M i body, které do M nepatří. (Opět viz obrázek.) Množina, která obsahuje všechny své hraniční body, je uzavřená. Množina M na obrázku je uzavřená, množina N uzavřená není. Neobsahuje žádné své hraniční body.



Pomocí pojmu okolí se zavádí pojmy jako limita nebo spojitost funkcí více proměnných. Limitami se zde vůbec zabývat nebudeme, pro ilustraci uvedu pouze definici spojitosti: říkáme, že funkce f n-proměnných je spojitá v bodě $A \in E_n$, jestliže ke každému okolí V funkční hodnoty $f(A)$ existuje okolí U bodu A takové, že pro každé $X \in U$ je $f(X) \in V$.