1 Polynomy

Polynomem stupně n nad tělesem $\mathbb{R}$ (v proměnné x) rozumíme výraz

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

kde n je přirozené číslo, $a_n, \ldots, a_0$ jsou reálné konstanty a $a_n \neq 0$. Stupeň polynomu je tedy číslo n udávající nejvyšší mocninu x, která se v polynomu "opravdu"vyskytuje. Např. $p(x) = 2x - 1$ je polynom stupně 1 (obecně budeme za polynomy stupně 1 považovat všechny lineární funkce s nenulovou směrnicí). $q(x) = 0x^5 + 2x - 1$ je také polynom stupně 1: $0x^5 = 0$ a nejvyšší mocnina x je pořád první. Kvadratické funkce jsou pak polynomy stupně 2. $r(x) = x^4 + x^7 - 16$ je polynom stupně 7 a $s(x) = 5$ je polynom stupně 0 ($x^0 = 1$).

Kořenem polynomu $p(x)$ nazýváme (prozatím reálné) číslo α takové, že $p(\alpha) = 0$ (je to takové číslo, že když ho dosadíme do polynomu za x, tak vyjde 0). Kořeny polynomu $p(x) = x^2 + 6x - 7$ jsou řešením rovnice $x^2 + 6x - 7 = 0$ tj. čísla $x_1 = 1$ a $x_2 = -7$. U kvadratických rovnic jsme viděli, že kořeny souvisí s tzv. rozkladem na kořenové činitele a že platí:
$p(x) = x^2 + 6x - 7 = (x - 1)(x + 7)$. Takto to funguje i pro polynomy vyšších stupňů a tyto rozklady budeme potřebovat. Situaci ale komplikují dva problémy: z řešení kvadratických rovnic víme, že kvadratické polynomy se záporným diskriminantem nemají (reálné) kořeny a nedají se proto rozkládat. Tento problém vyřešíme později pomocí tzv. komplexních čísel.

Druhým problémem je, že hledat kořeny (bez použití výpočetní techniky) polynomů vyšších stupňů může být těžké. Známe pouze vzorec na řešení kvadratické rovnice a jakmile bude stupeň vyšší, nebude moci kořeny obecně najít. Např. vzorce na řešení tzv. kubických rovnic (s polynomy stupně 3) jsou dost složité a od stupně 5 dokonce žádné vzorce neexistují.

Shrnutí: číslo α je kořen polynomu $p(x)$ právě tehdy, když $(x - \alpha)$ dělí polynom $p(x)$. (O dělení polynomů pojednáme níže.) Nejvyšší přirozené číslo t takové, že $(x - \alpha)^t$ dělí $p(x)$ se nazývá násobnost kořenu α.

1 a -7 jsou jednonásobné kořeny $p(x) = x^2 + 6x - 7 = (x-1)(x+7)$, protože $(x-1)$ resp. $(x+7)$ dělí $p(x)$ pouze v první mocnině. $p(x)$ není dělitelné $(x + 7)^2$ ani $(x - 1)^2$. Pokud máme k dispozizi rozklad na kořenové činitele, odpovídají násobnosti kořenů mocninám odpovídajících závorek: např. -7 je jednonásobný kořen, protože $(x + 7)$ je v rozkladu jednou: v první mocnině.

Pro nalezení kořenů polynomu $q(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$ je třeba si uvědomit, že platí $q(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = (x - 1)^4$. Jediným kořenem je tedy číslo 1 a je to čtyřnásobný kořen, protože závorka $(x - 1)$ je v $q(x)$ obsažena ve čtvrté mocnině. $q(x)$ je dělitelné $(x - 1)^4$.

Pomocí nalezených kořenů lze polynom postupně rozkládat, problémem jsou ale již zmiňované kvadratické polynomy se záporným diskriminantem a celkově tedy platí: každý polynom $p(x)$ nad $\mathbb{R}$ stupně alespoň 1 se dá psát jakou součin konstanty, lineárních polynomů (tzv. kořenových činitelů $(x - \alpha_i)$ odpovídajících kořenům α_i polynomu $p(x)$) a nerozložitelných kvadratických polynomů (se záporným diskriminantem).

Pokud nahlížíme na polynomy jako na funkce, můžeme je standardním způsobem derivovat i integrovat. Oba tyto procesy jsou pro polynomy zcela bezproblémové. Zajímavější situace nastane pro tzv. racionální funkce.

2 Racionální funkce

Racionální funkcí nazýváme funkci ve tvaru

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

kde $p(x)$ a $q(x)$ jsou polynomy. Pokud je stupeň polynomu v čitateli ostře menší než stupeň polynomu ve jmenovateli, nazývá se racionální funkce ryze racionální. V ostatních případech jde o neryze racionální funkci.

$f(x) = \dfrac{x+1}{x^5 - x^2}$ a $g(x) = \dfrac{x^3}{x^4 - 1}$ jsou ryze racionální funkce, funkce $h(x) = \dfrac{3x+5}{5x-1}$ a $k(x) = \dfrac{1 - x^4}{x^3 + x^2 - 5x + 6}$ jsou neryze racionální.

Každou neryze racionální funkci lze psát jako součet polynomu a ryze racionální funkce. Toto vyjádření budeme potřebovat a získáme ho vydělením polynomů v čitateli a jmenovateli – postup uvedeme v příslušné kapitole.

3 Integrace racionálních funkcí

Budeme se zabývat integrací racionální funkce, potřebné postupy ilustrujeme na řešených příkladech. Integrace racionálních funkcí probíhá v následujících krocích:

1. Pokud se nejedná o ryze racionální funkci (stupeň polynomu v čitateli je stejný nebo větší než stupeň polynomu ve jmenovateli), musíme nejprve vydělit čitatel jmenovatelem. Tím vyjádříme neryze racionální funkci jako součet polynomu a ryze racionální funkce. Polynom integrujeme snadno, integrací ryze racionální funkce se zabývá další text.

2. Rozložíme polynom ve jmenovateli na součin kořenových činitelů a nerozložitelných kvadratických polynomů. Toto může být dost náročné a jmenovatel bývá zadán už v rozloženém tvaru. U každého kvadratického polynomu je ale vždy nutné spočítat diskriminant a ověřit, zda je opravdu nerozložitelný (diskriminant je záporný)! V případě nezáporného diskriminantu je nutné kvadratický polynom rozložit.

3. Dle rozkladu polynomu ve jmenovateli rozložíme na parciální zlomky.

4. Každý parciální zlomek integrujeme. Integrace je u každého tvaru parciálního zlomku možná.

Každou fázi si nyní podrobněji rozebereme.

4 Dělení polynomů

Racionální funkce

$$\frac{2x^3 + 3x^2 - x + 1}{x - 2}$$

není ryze racionální: stupeň v čitateli je 3, stupeň ve jmenovateli 1. Před dalšími výpočty tedy musíme dělit $(2x^3+3x^2-x+1) : (x-2)$. Dělíme vedoucí člen dělence (sčítanec s nejvyšší mocninou x, zde $2x^3$) vedoucím členem dělitele (zde x). Výsledek částečného dělení $2x^3 : x = 2x^2$ napíšeme jako část výsledku:

$$(2x^3 + 3x^2 - x + 1) : (x - 2) = 2x^2.$$

Částečným podílem $2x^2$ vynásobíme dělitele: $2x^2 \cdot (x - 2) = 2x^3 - 4x^2$ a výsledek odečteme od původního dělence a dostaneme zbytek po dělení. Pokud počítáme správně, vedoucí člen se odečte a stupeň polynomu (zbytku) se tak sníží. Takto pokračujeme dále (dělíme zbytek původním dělitelem), dokud stupeň zbytku není menší než stupeň dělitele. Po prvním kroku tedy:

$$\begin{array}{l} \quad(2x^3 + 3x^2 - x + 1) : (x - 2) = 2x^2 \\ -\underline{(2x^3 - 4x^2)} \\ \qquad\qquad 7x^2 - x + 1 \end{array}$$

Po této fázi je tedy zbytek po dělení $7x^2 - x + 1$. Protože jeho stupeň není menší než stupeň dělitele $x - 2$, pokračujeme v dělení stejným spůsobem. Protože $7x^2 : x = 7x$, dostaneme po dalším kroku (zpětně násobíme novým podílem $7x$):

$$\begin{array}{l} \quad(2x^3 + 3x^2 - x + 1) : (x - 2) = 2x^2 + 7x \\ -\underline{(2x^3 - 4x^2)} \\ \qquad\qquad 7x^2 - x + 1 \\ \qquad\quad - \underline{(7x^2 - 14x)} \\ \qquad\qquad\qquad 13x + 1 \end{array}$$

Protože zbytek stále ještě nemá menší stupeň než dělitel, pokračujeme stejným způsobem:

$$\begin{array}{l} \quad(2x^3 + 3x^2 - x + 1) : (x - 2) = 2x^2 + 7x + 13 \\ -\underline{(2x^3 - 4x^2)} \\ \qquad\qquad 7x^2 - x + 1 \\ \qquad\quad - \underline{(7x^2 - 14x)} \\ \qquad\qquad\qquad 13x + 1 \\ \qquad\qquad\quad - \underline{(13x - 26)} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 27 \end{array}$$

Teď už je stupeň zbytku (27) menší než stupeň dělitele, máme tedy výsledek v této podobě: $(2x^3 + 3x^2 - x + 1) : (x - 2) = 2x^2 + 7x + 13$ se zbytkem 27. To znamená

$$2x^3 + 3x^2 - x + 1 = (x - 2) \cdot (2x^2 + 7x + 13) + 27.$$

Pro další výpočet to zapíšeme takto:

$$\frac{2x^3+3x^2-x+1}{x-2}=2x^2+7x+13+\frac{27}{x-2}.$$

Je zřejmé, že po provedení dělení dostáváme u této funkce tvar, který půjde velmi snadno integrovat. Ve složitějších případech musíme ale ještě provézt tzv. rozklad na parciální zlomky (viz dále).

4.1 Cvičení:

Ověřte (pomocí dělení čitatel:jmenovatel na levé straně), že platí:

1. $\dfrac{x^4+8x}{x^2-1}=x^2+1+\dfrac{8x+1}{x^2-1}$,
2. $\dfrac{2x^4+8x^2-16x}{2x+2}=x^3-x^2+5x-13+\dfrac{13}{x+1}$,
3. $\dfrac{x^5+x^4+x^3}{x^3-1}=x^2+x+1+\dfrac{x^2+x+1}{x^3-1}=x^2+x+1+\dfrac{1}{x-1}$,
4. $\dfrac{x^5+x^3-2x}{x^2-1}=x^3+2x$.

5 Rozklad polynomu ve jmenovateli

Rozkládání polynomu souvisí s hledáním kořenů polynomu, což je poměrně obtížné již pro polynomy třetího stupně. Polynom stupně většího než dva je tedy v našich příkladech buď již zadán (částečně) rozložený anebo se dá rozložit pomocí obvyklých vzorců. Např. dvojí aplikací $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ dostáváme $x^4-1=(x^2-1)(x^2+1)=(x-1)(x+1)(x^2+1)$.

Pro další integraci je však zásadní vždy kontrolovat diskriminanty kvadratických polynomů ve jmenovateli. Funkce $\frac{1}{1+x^2}$ má ve jmenovateli kvadratický polynom se záporným diskriminantem, nedá se tedy již upravovat. Z hlediska integrace to nevadí, protože integrál je dle tabulky $\arctan x+c$. Podobnou funkci $\frac{1}{1-x^2}$ ovšem v tabulce integrálů nenajdeme. Jmenovatel se totiž dá rozkládat (kladný diskriminant) a platí $\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{(1-x)(1+x)}$. Před integrací je tedy třeba provést tzv. rozklad na parciální zlomky (viz dále).

6 Rozklad na parciální zlomky

Ryze racionální funkci můžeme napsat jako součet tzv. parciálních zlomků. Hledaný rozklad získáme dle následujích pravidel:

1. Ke každému členu rozkladu jmenovatele $(x-\alpha)^k$ (odpovídajícímu $k-$násobnému kořenu jmenovatele α) vytvoříme k parciálních zlomků:

$$\frac{A_1}{x-\alpha}, \qquad \frac{A_2}{(x-\alpha)^2}, \qquad \cdots \qquad \frac{A_k}{(x-\alpha)^k}$$

2. Ke každému členu rozkladu jmenovatele $(x^2+px+q)^l$ (s diskriminantem $p^2-4q<0$) vytvoříme l parciálních zlomků:

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}, \qquad \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2}, \qquad \cdots \qquad \frac{B_lx+C_l}{(x^2+px+q)^l}$$

kde α, p, q jsou zadaná reálná čísla, k a l jsou zadaná přirozená čísla a A_i, B_i a C_i jsou reálná čísla, která dopředu neznáme a musíme je dopočítat. Postup budeme ilustrovat na následujících příkladech:

1. Racinální funkce $\frac{5x-11}{x^2-6x-7}$ je ryze racionální, stupeň polynomu v čitateli je 1, stupeň polynomu ve jmenovateli je 2. Pro další postup je klíčový diskriminant jmenovatele. Pokud by byl záporný nebo nula, jednalo by se již o parciální zlomek a žádné další úpravy by nebyly možné. Diskriminant je ovšem kladný $D=64$, jmenovatel a tedy i celý zlomek se dají rozkládat. Kvadratická rovnice $x^2-6x-7=0$ má dvě řešení $x_1=-1$ a $x_2=7$, platí proto $x^2-6x-7=(x+1)(x-7)$. Oba kořeny jsou jednonásobné, dostaneme tedy jeden zlomek se jmenovatelem $x+1$ a jeden se jmenovatelem $x-7$:

$$\frac{5x-11}{x^2-6x-7}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-7}.$$

Nyní musíme určit čísla A a B. Zlomky vpravo tedy převedeme na společného jmenovatele:

$$\frac{5x-11}{x^2-6x-7}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-7}=\frac{A(x-7)+B(x+1)}{(x+1)(x-7)}=\frac{(A+B)x-7A+B}{(x+1)(x-7)},$$

kde jsme čitatele vpravo postupně roznásobili a vytkli jsme x. Toto je rovnost funkcí, rovnost tedy musí platit pro všechna x z definičního oboru. Protože jsou stejní jmenovatelé, musí být i stejní čitatelé, tj. polynomy v čitateli musí mít u všech mocnin x stejné koeficienty. Protože na levé straně je v čitateli u x koeficient 5 a na pravé straně $A+B$, musí platit $A+B=5$. Stejně tak $-7A+B=-11$. Snadno vypočítáme $A=2$ a $B=3$. Rozklad zadané funkce je:

$$\frac{5x-11}{x^2-6x-7}=\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-7}.$$

2. Racionální funkce $\frac{3x^2+7x+1}{(x+1)^2(x-2)}$ je ryze racionální (v čitateli je polynom stupně 2, ve jmenovateli je polynom stupně 3, jak uvidíme po roznásobení všech závorek) a jmenovatel je rozložený na kořenové činitele, můžeme tedy rovnou začít rozkládat na parciální zlomky. Závorka

$(x-2)$ je ve jmenovateli v první mocnině, bude jí tedy odpovídat jeden parciální zlomek $\dfrac{A}{x-2}$. Závorka $(x+1)$ je ve jmenovateli ve druhé mocnině, vytvoříme tedy dva parciální zlomky s postupně první a druhou mocninou: $\dfrac{B}{x+1}$ a $\dfrac{C}{(x+1)^2}$. Celkem tedy dostáváme:

$$\frac{3x^2+7x+1}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2},$$

kde A, B a C jsou neznámé reálné konstanty, které potřebujeme určit. Převedeme tedy daný rozklad na společného jmenovatele:

$$\frac{3x^2+7x+1}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2 + B(x+1)(x-2) + C(x-2)}{(x+1)^2(x-2)},$$

po roznásobení

$$\frac{3x^2+7x+1}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} = \frac{A(x^2+2x+1) + B(x^2-x-2) + C(x-2)}{(x+1)^2(x-2)},$$

resp. po dalším roznásobení a vytknutí x^2 a x:

$$\frac{3x^2+7x+1}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{(A+B)x^2 + (2A-B+C)x + A - 2B - 2C}{(x+1)^2(x-2)},$$

Toto je rovnost funkcí, rovnost tedy musí platit pro všechna x z definičního oboru. Protože jsou stejní jmenovatelé, musí být i stejní čitatelé, tj. polynomy v čitateli musí mít u všech mocnin x stejné koeficienty. Protože na levé straně je v čitateli u x^2 koeficient 3, musí být i na pravo u x^2 koeficient 3 a platí $A+B=3$. Podobně porovnáním koeficientů u x dostaneme $2A-B+C=7$. A nakonec porovnáním absolutních členů (koeficienty u x^0) dostaneme $A-2B-2C=1$. Pro hledaná čísla A, B a C tak dostáváme soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} x^2 &: A+B=3 \\ x &: 2A-B+C=7 \\ x^0 &: A-2B-2C=1. \end{aligned}$$

Tu vyřešíme obvyklým způsobem sčítací nebo dosazovací metodou (např. z první rovnice použijeme $A=3-B$) a dostaneme řešení $A=3$, $B=0$ a $C=1$. Hledaný rozklad má tuto podobu:

$$\frac{3x^2+7x+1}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{3}{x-2} + \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Vidíme, že oba zlomky napravo půjdou snadno integrovat. Integrací se ale budeme zabývat až v další kapitole.

3. Racionální funkce $\dfrac{2x^2+5x+5}{(x^2+2x+3)(x-1)}$ je ryze racionální (v čitateli je polynom stupně 2, ve jmenovateli je polynom stupně 3, jak uvidíme po roznásobení všech závorek) a jmenovatel je rozložený (diskriminant polynomu x^2+2x+3 je záporný: $D=-8$), můžeme tedy rovnou začít rozkládat na parciální zlomky. Obě závorky ve jmenovateli jsou v první mocnině, ke každé tedy sestrojíme jeden parciální zlomek. K nerozložitelnému kvadratickému jmenovateli patří obecně lineární činitel, rozklad tedy hledáme ve tvaru:

$$\frac{2x^2+5x+5}{(x^2+2x+3)(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+2x+3} + \frac{C}{x-1}$$

a obvyklým postupem hledáme konstanty A, B a C.

$$\frac{2x^2+5x+5}{(x^2+2x+3)(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+2x+3} + \frac{C}{x-1} = \frac{(Ax+B)(x-1)+C(x^2+2x+3)}{(x^2+2x+3)(x-1)}$$

a po úpravě čitatele

$$\frac{2x^2+5x+5}{(x^2+2x+3)(x-1)} = \frac{(A+C)x^2+(-A+B+2C)x-B+3C}{(x^2+2x+3)(x-1)}.$$

Porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin x v čitateli dostaneme soustavu:

$$\begin{aligned} x^2 &: A+C=2 \\ x &: -A+B+2C=5 \\ x^0 &: -B+3C=5. \end{aligned}$$

Sečtením první a druhé rovnice dostaneme $B+3C=7$. Toto přičteme ke třetí rovnici a obdržíme $6C=12$ neboli $C=2$. snadno dopočítáme $A=0$ a $B=1$. Hledaný rozklad tedy vypadá:

$$\frac{2x^2+5x+5}{(x^2+2x+3)(x-1)} = \frac{1}{x^2+2x+3} + \frac{2}{x-1}.$$

4. Racionální funkce $\dfrac{x^4+2x^2+x-2}{(x^2+1)^2(x-3)}$ je ryze racionální (v čitateli je polynom stupně 4, ve jmenovateli je polynom stupně 5, jak uvidíme po roznásobení všech závorek) a jmenovatel je rozložený (diskriminant polynomu x^2+1 je záporný: $D=-4$), můžeme tedy rovnou začít rozkládat na parciální zlomky. Činitel $(x-3)$ je ve jmenovateli v první mocnině, budeme mít jeden zlomek s tímto jmenovatelem. Činitel (x^2+1) je ve druhé mocnině, budeme mít tedy dva zlomky s obecně lineárním čitatelem a jmenovateli (x^2+1) a $(x^2+1)^2$:

$$\frac{x^4+2x^2+x-2}{(x^2+1)^2(x-3)} = \frac{A}{x-3} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Po převedení na společného jmenovatele pak

$$\frac{x^4+2x^2+x-2}{(x^2+1)^2(x-3)} = \frac{A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x-3)(x^2+1)+(Dx+E)(x-3)}{(x^2+1)^2(x-3)}$$

a po úpravách máme na pravé straně

$$\frac{(A+B)x^4+(-3B+C)x^3+(2A+B-3C+D)x^2+(-3B+C-3D+E)x+A-3C-3E}{(x^2+1)^2(x-3)}$$

Z toho sestavíme soustavu:

$$\begin{aligned} x^4 &: A+B=1 \\ x^3 &: -3B+C=0 \\ x^2 &: 2A+B-3C+D=2 \\ x &: -3B+C-3D+E=1 \\ x^0 &: A-3C-3E=-2. \end{aligned}$$

Ačkoliv je to již poměrně velká soustava, dá se celkem dobře řešit (vřele doporučuji to zkusit, radil bych např. z prvních dvou rovnic vyjádřit a dosadit a tím zredukovat počet neznámých o dvě) a vychází: $A=E=1$ a $B=C=D=0$. Hledaný rozklad je:

$$\frac{x^4+2x^2+x-2}{(x^2+1)^2(x-3)} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{(x^2+1)^2}.$$

6.1 Cvičení:

Nalezněte rozklad na parciální zlomky:

1. $\dfrac{x-14}{x^2-3x-4}$
2. $\dfrac{33-9x}{9-x^2}$
3. $\dfrac{4+11x}{x^2+2x+10}$
4. $\dfrac{4x^2+6x-1}{(x+1)^2(x-2)}$
5. $\dfrac{4x^2+x+6}{(x^2+2x+2)(x-5)}$
6. $\dfrac{x^3+5x^2+3x+3}{(x^2+1)(x+1)^2}$

6.2 Řešení:

1. $\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{2}{x-4}$
2. $\dfrac{1}{3-x}+\dfrac{10}{3+x}$
3. nelze dále rozkládat, již to je parciální zlomek
4. $\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{3}{x-2}$
5. $\dfrac{x}{x^2+2x+2}+\dfrac{3}{x-5}$
6. $\dfrac{x+1}{x^2+1}+\dfrac{2}{(x+1)^2}$

7 Integrace parciálních zlomků

Naším hlavním cílem je integrace racionálních funkcí. Máme-li vyděleno (v případě, že jde o neryze racionální funkci) a rozděleno na parciální zlomky, můžeme každý zlomek zvlášť integrovat. Dané postupy budeme pouze ilustrovat na příkladech, nebudu uvádět obecné tvary zlomků a příslušných funkcí.

1. Integrace parciálního zlomku odpovídajícího jednonásobnému reálnému kořenu jmenovatele integrované funkce je jednoduchá a vždy se jedná o (přirozený) logaritmus, například:

   $$\int \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x = \ln|x-2| + c.$$

   Často se k tomu píše (a budeme to také používat): pro $x \neq 2$. Mějme ovšem na paměti, že primitivní funkce a neurčitý integrál počítáme vždy na otevřeném intervalu. Uvádíme-li tedy u výsledku jiný tvar množiny M než interval, znamená to pro libovolný $(a,b) \in M$. V našem případě tedy pro libovolné inervaly neobsahující dvojku.

Nezapomínejte také na tzv. lineární substituci:

$$\int \frac{1}{3-x}\,\mathrm{d}x = -\ln|3-x| + c,$$

pro $x \neq 3$ nebo

$$\int \frac{1}{5x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\ln|5x-1| + c,$$

pro $x \neq \dfrac{1}{5}$.

2. Integrace parciálního zlomku odpovídajícího vícenásobnému kořeni jmenovatele (s větší než první mocninou ve jmenovateli) je stejně jednoduchá a integrujeme vždy jako mocninu, např.:

$$\int \frac{1}{(x+3)^3}\,\mathrm{d}x = \int (x+3)^{-3}\,\mathrm{d}x = \frac{(x+3)^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2(x+3)^2} + c,$$

pro $x \neq -3$. A opět lineární substituce:

$$\int \frac{1}{(1-x)^5}\,\mathrm{d}x = -\frac{(1-x)^{-4}}{-4} = \frac{1}{4(1-x)^4} + c,$$

pro $x \neq 1$.

3. Integrace zlomků s nerozložitelným kvadratickým polynomem ve jmenovateli je obtížnější než v předcházejících variantách. Podívejme se nejprve na variantu, kdy kvadratický polynom je ve jmenovateli pouze v první mocnině. V těchto situacích se používají dvě techniky. Nejprve se, pokud je v čitateli x, integrovaný parciální zlomek upraví tak, aby se dala využít následující integrace, kterou jsme probírali v kapitole o substitucích:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c,$$

provádíme vlastně substituci $t = f(x)$ a $\mathrm{d}t = f'(x)\mathrm{d}x$.

Integrace parciálních zlomků, které mají v čitateli pouze číslo (jsou tak rovnou zadány nebo v takovém tvaru "zbydou"po předchozí úpravě), vede na funkci arctan.

Máme-li spočítat

$$\int \frac{x-1}{x^2+4}\,\mathrm{d}x,$$

upravíme nejprve zlomek tak, aby v čitateli byla derivace jmenovatele:

$$\int \frac{x-1}{x^2+4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+4}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x^2+4}\,\mathrm{d}x.$$

První integrál spočítáme dle výše uvedeného vztahu resp. provedeme substituci $t = x^2 + 4$ a dostaneme

$$\int \frac{2x}{x^2+4}\,\mathrm{d}x = \ln(x^2+4) + c,$$

pro $x \in \mathbb{R}$. Absolutní hodnotu jsme odstranili, protože $x^2 + 4$ je kladné pro všechna reálná x.

Druhý integrál musíme upravit do takové podoby, aby šla použít integrace typu arctan. V této situaci se často hodí úprava na čtverec, v našem zadání chybí člen s x v první mocnině, takže je to vlastně hotovo. Každopádně ale potřebujeme na konci jedničku, ve jmenovateli tedy vytkneme 4 a upravujeme:

$$\int \frac{1}{x^2+4}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{4\left(\dfrac{x^2}{4}+1\right)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}2\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+c,$$

pro $x \in \mathbb{R}$. Při integraci jsme použili lineární substituci $t = \dfrac{x}{2}$.

Celkový výsledek pak je:

$$\int \frac{x-1}{x^2+4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+4}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x^2+4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(x^2+4) - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+c$$

pro $x \in \mathbb{R}$.

Pro výpočet

$$\int \frac{4x}{x^2+2x+10}\,\mathrm{d}x$$

víceméně opakujeme předchozí postup. Nejprve vytvoříme v čitateli derivaci jmenovatele, zbytek pak integrujeme na funkci arctan:

$$\int \frac{4x}{x^2+2x+10}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{2x+2}{x^2+2x+10}\,\mathrm{d}x - \int \frac{4}{x^2+2x+10}\,\mathrm{d}x =$$

$$= 2\int \frac{2x+2}{x^2+2x+10}\,\mathrm{d}x - \int \frac{4}{(x+1)^2+9}\,\mathrm{d}x =$$

$$= 2\int \frac{2x+2}{x^2+2x+10}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{9}\int \frac{4}{\dfrac{(x+1)^2}{9}+1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= 2\int \frac{2x+2}{x^2+2x+10}\,\mathrm{d}x - \frac{4}{9}\int \frac{1}{\left(\dfrac{x+1}{3}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= 2\ln(x^2+2x+10) - \frac{4}{3}\arctan\left(\frac{x+1}{3}\right)+c$$

pro $x \in \mathbb{R}$.

4. Integrace parciálních zlomků s vyšší než první mocninou nerozložitelného kvadratického polynomu ve jmenovateli je nejnáročnější. Zpravidla se řeší pomocí tzv. rekurentní formule, založené na postupném snižování mocniny pomocí metody per partes. S tímto se v tomto předmětu v žádné písemce nesetkáte. Výpočet budeme pouze ilustrovat nejjednodušším příkladem s mocninou 2.

Pro výpočet

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x,$$

budeme pomocí metody per partes počítat integrál s mocninou jmenovatele o jedničku menší:

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{1+x^2} + \int \frac{2x^2}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x,$$

$$\begin{aligned} u &= (x^2+1)^{-1} & u' &= -(x^2+1)^{-2}2x \\ v' &= 1 & v &= x \end{aligned}$$

z čehož po úpravách obdržíme per partes rovnici:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x &= \frac{x}{1+x^2} + \int \frac{2x^2}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{x}{1+x^2} + 2\int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x - 2\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{x}{1+x^2} + 2\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x - 2\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

ze které integrál $\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$, vyjádříme:

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x,$$

přičemž integrál napravo je snadný a výsledek je

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\arctan x + c$$

pro $x \in \mathbb{R}$.

7.1 Cvičení:

1. $\int \frac{x^2-8}{x^2-9}\,\mathrm{d}x$
2. $\int \frac{x^2-x+4}{x^2-2x+3}\,\mathrm{d}x$
3. $\int \frac{x^5-2x^4+4x^3+10x^2+4}{x^4+x^2}\,\mathrm{d}x$
4. Integrujte racionální funkce z předchozích cvičení!

   Pro kontrolu výsledků použijte WolframAlpha. Vyzkoušejte

   ```
   integrate (x^2-8)/(x^2-9)
   ```

   nebo

   ```
   partial fractions (x^2-8)/(x^2-9)
   ```