1 Určitý integrál

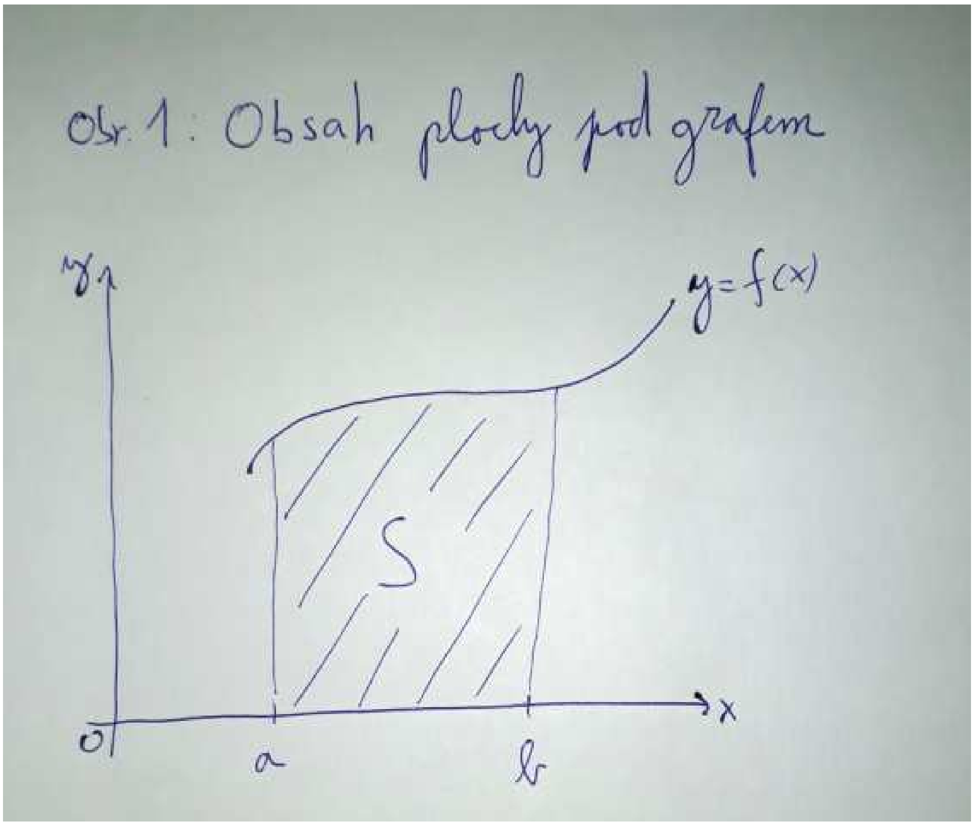
Tento text nepředkládá úplnou teorii určitého integrálu, jde spíše o doprovodný text vysvětlující některé aspekty dané problematiky. Pro přesnou teorii určitého integrálu můžete použít libovolná sktipta nebo učebnice matematické analýzy.

Zatím jsme se zabývali technickou stránkou výpočtu tzv. neurčitého integrálu a hledali jsme tedy primitivní funkce. Nebylo ale vůbec jasné, k čemu vlastně tento obrácený chod derivace slouží. Postupně se setkáme se dvěma použitími těchto výpočtů. Na konci semestru se seznámíme s tzv. diferenciálními rovnicemi, jejichž řešení tvoří naprostý základ tzv. inženýrské matematiky. Nyní se podíváme na geometrickou úlohu, která je s integrací spojená a stojí často přímo u definice tzv. určitého integrálu.

Zmiňovaná geometrická úloha je výpočet obsahu. Možná vás někdy napadlo, když jste počítali obsah nějakého útvaru podle vzorce z tabulek, kde se daný vzorec vlastně vzal. Odpodvěď je, že všechny tyto vzorce jsou výsledky integrálního počtu. V navazujícím studiu vás pak čekají např. výpočty objemů těles či délek křivek, vše pomocí integrálů. Integrály tedy (mimo jiné) slouží k měření velikostí geometrických útvarů.

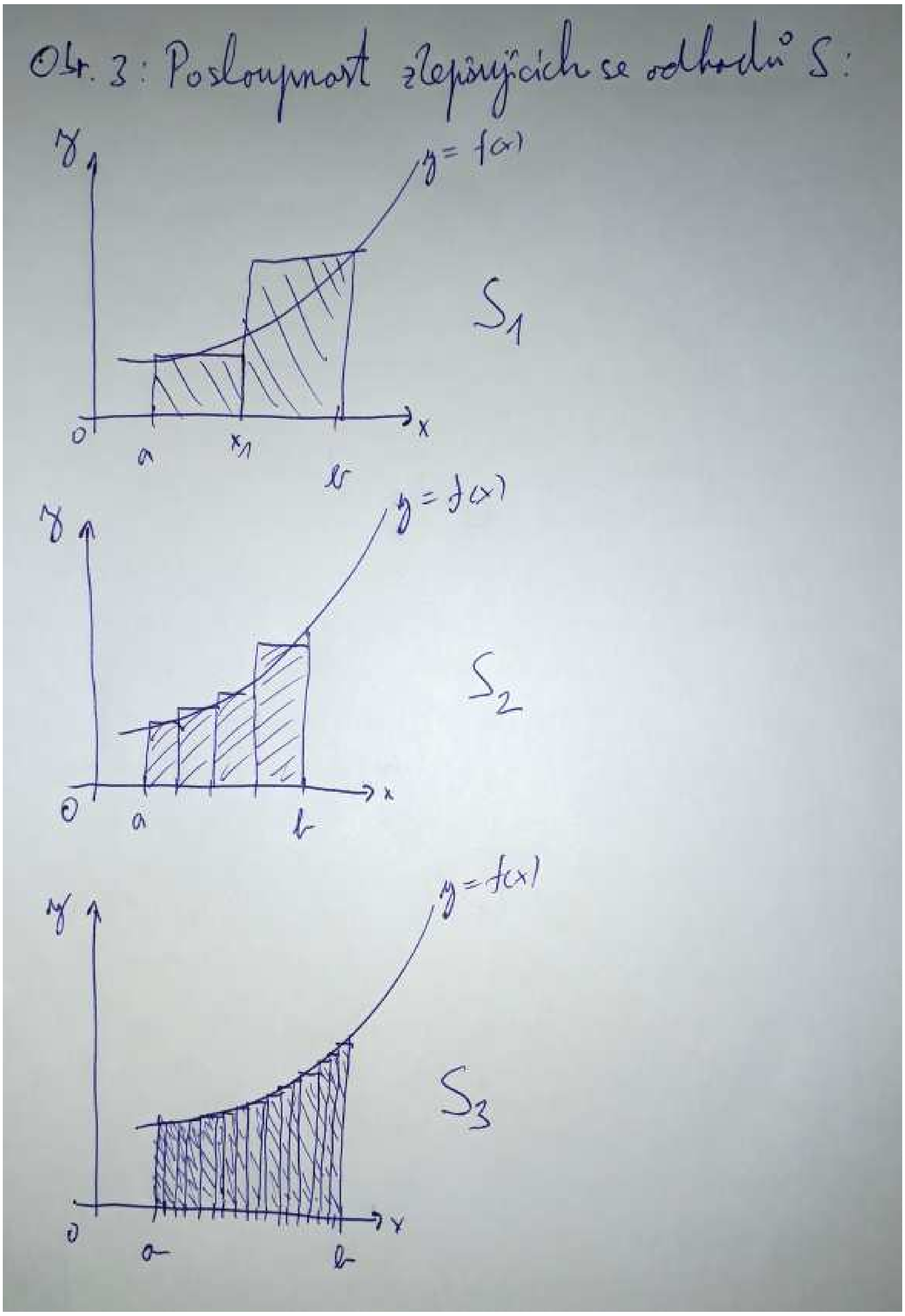
1.1 Základní úloha integrálního počtu

Mějme danou funkci $y = f(x)$ nezápornou a spojitou na intervalu $\langle a, b\rangle$. Chceme spočítat obsah obrazce, který je ohraničený zdola osou x, zleva a zprava přímkami $x = a$ a $x = b$ a shora grafem funkce $y = f(x)$:



Jak tedy obsah mezi osou x a grafem $y = f(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$ můžeme zjistit? Poměrně elementárně se dá odvodit výpočet obsahu obdélníku nebo trojúhelníku. Jakmile má ale daný obrazec "zakřivený obvod", je výpočet obsahu mnohem složitější.

Jednou z možností, jak daný obsah zjistit je následující cesta vedoucí k tzv. **Riemannovu integrálu**. Spočítejme nejprve hledaný obsah přibližně. Rozdělme interval $\langle a, b\rangle$, který tvoří "dolní stranu"daného obrazce na několik částí a počítanou plochu nahraďme obdélníky, jejichž podstavy jsou jednotlivé části rozděleného intervalu $\langle a, b\rangle$ a jako výšku použijeme funkční hodnotu funkce $y = f(x)$ v libovolném bodě nad podstavou. Dostaneme tak útvar, jehož horní strana připomíná schody nebo hradby a který je složený z obdélníků. Jeho obsah tedy dokážeme spočítat jako součet obsahů jednotlivých obdélníků a tento obsah je přibližně roven hledanému obsahu poda grafem $y = f(x)$.



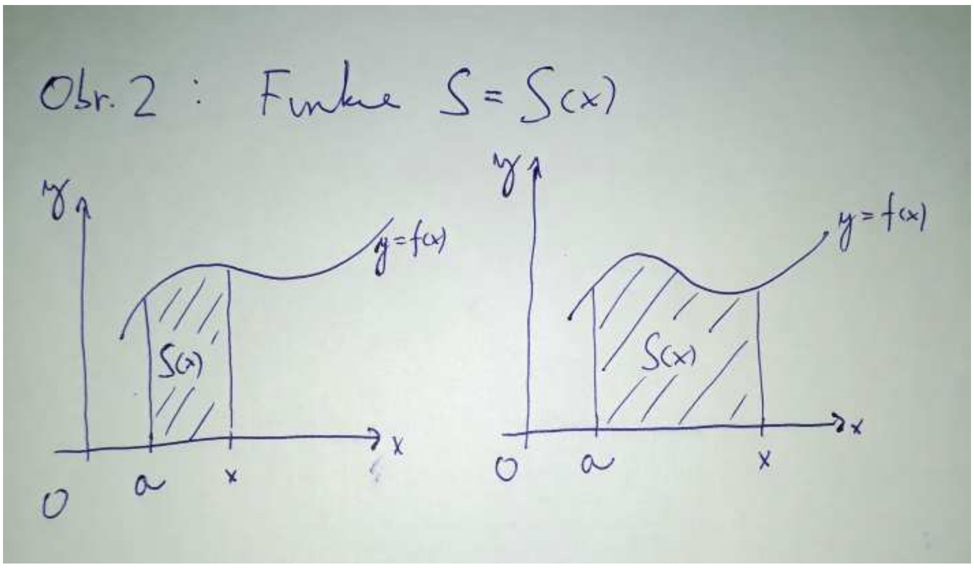
Z obrázku je patrné, že pokud použijeme obdélníků málo, chyba odhadu může být poměrně velká. Obdélníky někde původní obrazec přesahují o velký kus a někde naopak nepokrývají.

Budeme-li ale postupně interval $\langle a, b\rangle$ dělit na menší a menší dílky (tzv. zjemňování dělení) a budeme tedy používat více a více obdélníků, budou naše odhady stále přesnější. Toho se dá využít pro přibližný výpočet hledaného obsahu, to je obsahem tzv. numerické matematiky. My ale chceme přesnou hodnotu. Jak jsme již uvedli, postupným zjemňováním dělení dostáváme lepší a lepší odhady. Vytváříme tak posloupnost zlepšujících se odhadů hledaného obsahu. Má-li tato posloupnost limitu, je hodnota této limity přesnou hodnotou hledaného obsahu a nazývá se Riemannův integrál (nebo určitý integrál) funkce $y = f(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$ a značí se $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Výraz $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ tedy značí obsah plochy mezi intervalem $\langle a, b\rangle$ a grafem spojité nezáporné funkce $y = f(x)$. Číslo a se nazývá dolní mez, číslo b je horní mez.

Zbývá zodpovědet otázku, jak je to s integrálem funkce, která není na intervalu $\langle a, b\rangle$ nezáporná. Integrál se definuje v předchozím textu naznačeným způsobem pro libovolnou funkci (existence integrálu je ovšem podmíněna existencí limity výše popisované posloupnosti). Je třeba si ale uvědomit, že jako výšku obdélníku jsme použili funkční hodnotu. Pokud je funkční hodnota záporná, počítáme se zápornou výškou a obsah takového obdélníku vyjde záporně. Důsledkem toho je, že obsah mezi osou x a zápornou funkcí $y = f(x)$ integrál načítá jako záporný - se znaménkem minus. To je vlastnost integrálu, kterou je třeba zohlednit při výpočtu obsahu. Integrál záporný být může, ale obsah by záporný být neměl, více v dalším textu.

1.2 Newton–Leibnizova formule

Počítat určitý integrál (obsah pod grafem) jako limitu posloupnosti odhadů by bylo velmi složité. Kromě toho zatím stále nevíme, jak tato problematika souvisí s hledáním primitivních funkcí, čímž jsme se zabývali doteď. Hledaný obsah obrazce mezi grafem funkce $y = f(x)$ a intervalem $\langle a, b\rangle$ závisí jednak na tom, jak vypadá graf funkce $y = f(x)$ a také na tom, jak je zadán interval $\langle a, b\rangle$. Domluvme se tedy, že v dalším výkladu nebudeme měnit funkci $y = f(x)$ ani počáteční bod intervalu a. Měnit budeme pouze koncový bod intervalu a budeme počítat obsah plochy mezi intervalem $\langle a, x\rangle$ a funkcí $y = f(x)$. Koncový bod intervalu teď místo b značíme x, abychom zdůraznili, že tento bod budeme měnit. Hodnota obsahu S mezi grafem $y = f(x)$ a intervalem $\langle a, x\rangle$ samozřejmě záleží na tom, jak zvolíme x, tento obsah je proto funkcí x: $S = S(x)$.



Základním poznatkem integrálního počtu a velmi zajímavým faktem je pak to, že daná funkce $S = S(x)$ je primitivní funkcí k funkci $y = f(x)$, jejíž graf ohraničuje hledaný obrazec shora. Jestliže tedy známe nějakou konrétní primitivní funkci $F(x)$ (k funkci $f(x)$), musí platit

$S(x) = F(x) + c$, kde c je nějaká konstanta. Hodnotu konstanty c zjistíme tak, že si uvědomíme, že pro $x = a$ je daný obsah 0 tj. $S(a) = 0$ (vznikne obrazec, který má nulovou šířku). Takže $0 = S(a) = F(a) + c$ a $c = -F(a)$. Dostáváme $S(x) = F(x) - F(a)$, pro $x = b$ dostáváme $S(b) = F(b) - F(a)$ a pro určitý integrál proto platí tato důležitá tzv. Newton–Leibnizova formule:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Tento vzorec budeme používat pro výpočet určitých integrálů. Pro výpočty se hodí následující značení: $F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$. Potom píšeme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Při výpočtu potřebuje nejprve najít nějakou primitivní funkci, do té pak dosadíme meze a a b a spočítáme rozdíl $F(b) - F(a)$.

Spočítejme $\int_0^1 (x+1)\,\mathrm{d}x$. Nalezneme nejprve primitivní funkci, počítáme vlastně neurčitý integrál $\int (x+1)\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^2}{2} + x + c$, potřebujeme jednu konkrétní primitivní funkci, zpravidla tedy volíme $c = 0$ (ale je to jedno) a píšeme $\int_0^1 (x+1)\,\mathrm{d}x = \left[\dfrac{x^2}{2} + x\right]_0^1$. Zápis napravo znamená, že máme do funkce v hranaté závorce dosadit nejprve horní mez 1, potom dolní mez 0 a oba výsledky od sebe odečíst. Celý výpočet pak vypadá:

$$\int_0^1 (x+1)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_0^1 = \frac{3}{2} - 0 = \frac{3}{2}.$$

Obsah obrazce mezi osou x a grafem funkce $y = x + 1$ na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ je $\frac{3}{2}$. To se dá snadno zkontrolovat z obrázku, daný obsah se dá spočítat jakou součet obsahu trojúhelníku a čtverce. V jakých jednotkách obsah měříme? Plošná jednotka je určena čtvercem 1×1 tedy např. čtvercem s vrcholy o souřadnicích $[0, 0]$, $[0, 1]$, $[1, 0]$ a $[1, 1]$.

Obsah pod parabolou už jinak než pomocí integrálu nespočítáme, výpočet bude velmi jednoduchý:

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

Je zajímavé, že obsah "trojúhelníku", jehož jedna strana je část paraboly (viz následující obrázek), je racionální číslo $\dfrac{1}{3}$.

Spočítejme ještě:

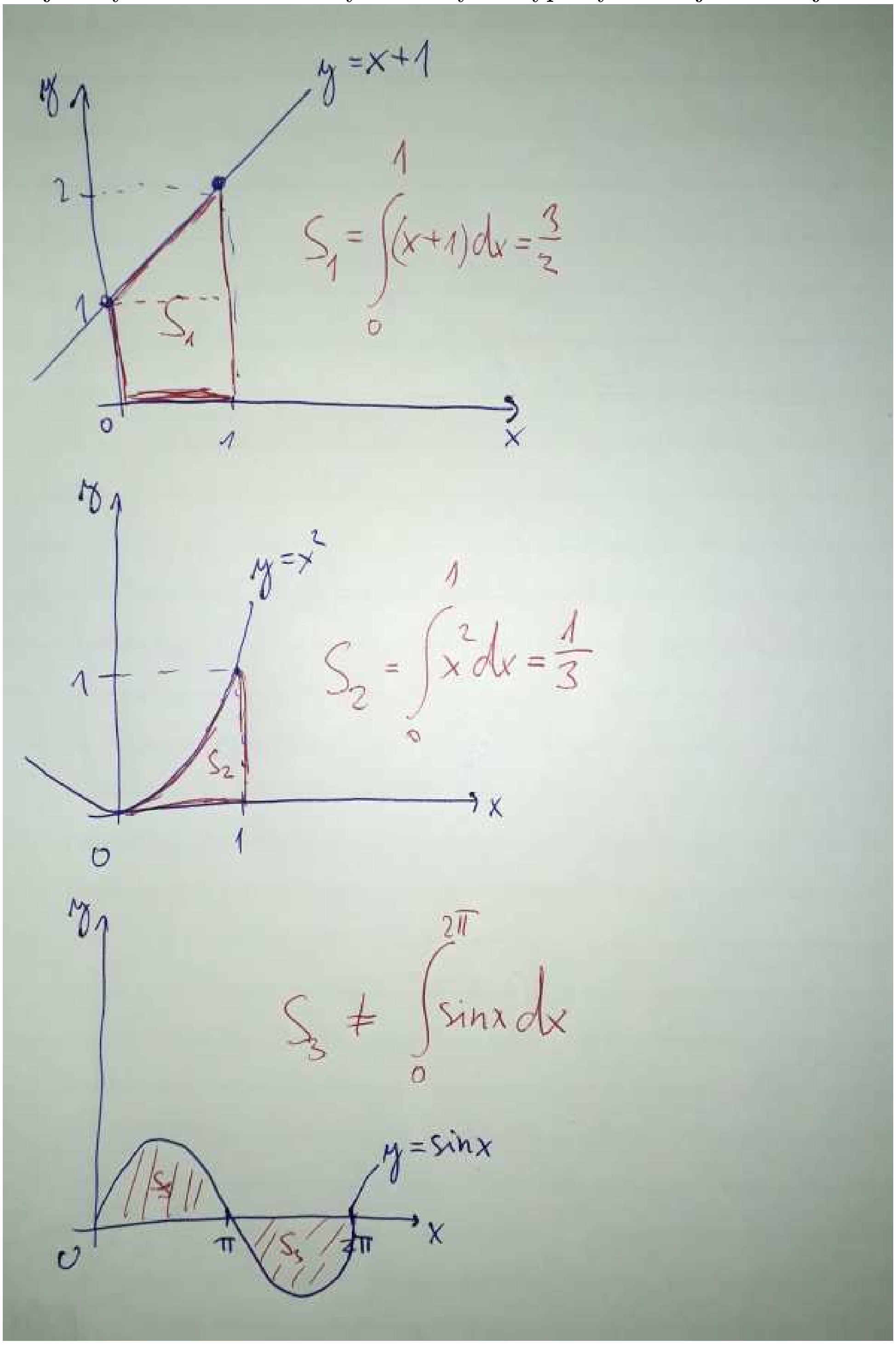
$$\int_0^{2\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = [-\cos x]_0^{2\pi} = -1 - (-1) = 0.$$

Tento výsledek ale vyžaduje další komentář, protože obsah mezi osou x a grafem $y = \sin x$ určitě není 0. Integrál počítá obsah pod grafem nezáporné funkce, funkce $\sin x$ ale na intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$ nezáporná není. Jak jsme již uváděli, integrál má tu vlastnost, že obsah pod osou x načítá se znaménkem mínus. Obsah mezi $\sin x$ a x nad osou x (pro $x \in \langle 0, \pi\rangle$) je stejný, jako obsah pod osou x (pro $x \in \langle \pi, 2\pi\rangle$), ten se ovšem započítá se znaménkem minus, obě hodnoty se odečtou a integrál proto vyjde 0. Pokud bychom chtěli spočítat obsah mezi osou x a grafem $y = \sin x$

na intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$, museli bychom vyjít z toho, že obsah pod osou x je stejný jako obsah nad osou x a tedy celkový obsah mezi osou a grafem $y = \sin x$ na $\langle 0, 2\pi\rangle$ spočítáme jako dvojnásobek obsahu mezi osou x a grafem $y = \sin x$ na $\langle 0, \pi\rangle$ a platí:

$$S = 2\int_0^{\pi} \sin x \,\mathrm{d}x = 2\left[-\cos x\right]_0^{\pi} = 2(1-(-1)) = 4.$$

Obsah je tady dokonce celočíselný. Všechny tři výpočty ilustruje následující obrázek:



1.3 Výpočet určitého integrálu

Jak již víme, pro výpočet určitého integrálu potřebujeme znát primitivní funkci. Jedna z možností je spočítat si primitivní funkci někde stranou a tu pak použít:

Chceme-li spočítat $\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$, spočítáme si nejprve neurčitý integrál stejné funkce: $\int 2x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$. K tomu použijeme substituci $t = x^2+1$ a $\mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x$ a dostaneme

$$\int 2x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + c.$$

Tento výsledek nyní použijeme pro výpočet zadaného určitého integrálu:

$$\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\left(2^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2}{3}(\sqrt{8}-1).$$

Při výpočtech se zpravidla ukazuje jako praktičtější pracovat rovnou s určitým integrálem. Ačkoliv jde svou podstatou o dost odlišné věci, některé vlastnosti, které potřebujeme pro výpočet určitého integrálu, jsou analogické vlastnostem integrálu neurčitého.

Věta 1 *Pro funkce $f(x)$ a $g(x)$ spojité na $\langle a,b\rangle$ a libovolné reálné α platí:*

$$\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_a^b \left(\alpha\cdot f(x)\right)\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Kromě toho se můžou hodit i následující vlastnosti.

Věta 2 *Pro funkci $f(x)$ spojitou na intervalu I obsahujícím (libovolně položené) body a,b,c platí:*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(Není nutné, aby dolní mez integrálu byla menší než horní mez.)

Abychom mohli řešit všechny určité integrály, které potřebujeme, musíme ještě uvést jak vypadají pro určitý integrál metody per partes a substituční. Naštěstí se formálně od metod, které známe z neurčitého integrálu, liší jen málo.

Provádíme-li substituci v určitém integrálu, postupujeme tak, jak již známe z neurčitého integrálu. Při substituci dochází ke změně proměnné, což se v určitém integrálu projeví změnou integračních mezí. Ty se musí přepočítat podle substitučního vztahu. Je velmi častá chyba na toto zapomenout! Uveďme nejprve obecný vztah, ten pak budeme ilustrovat na několika úlohách.

Věta 3 *Jsou-li funkce $t = g(x)$ a její derivace $g'(x)$ spojité v $\langle a,b\rangle$ a je-li také $f(t)$ spojitá pro všechna $t = g(x)$ pro $x\in\langle a,b\rangle$, pak platí:*

$$\int_a^b f\left(g(x)\right)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Provádíme substituci obvyklým způsobem: $t = g(x)$ a $\mathrm{d}t = g'(x)\mathrm{d}x$. K tomu pouze navíc nezapomene také převpočítat meze, z původních mezí a a b dostaneme nové meze $g(a)$ a $g(b)$.

Příklady:

1. Spočítejme znovu $\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$, který jsme už jednou počítali na začátku této kapitoly. Použijeme substituci $t = x^2 + 1$ a $\mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x$. K tomu ještě přepočítáme meze, pro dolní mez $x = 0$ dostaneme novou dolní mez $t = 0^2 + 1 = 0$ (protože $t = x^2 + 1$) a pro horní mez $x = 1$ dostaneme novou horní mez $t = 1^2 + 1 = 2$. Substituce tedy vypadá:
$$\int_0^1 2x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}[t^{\frac{3}{2}}]_1^2 = \frac{2}{3}\left(2^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2}{3}(\sqrt{8}-1).$$
V substituci už se nevracíme k původní proměnné, po substituci dopočítáme celý příklad v nové proměnné. Výsledek určitého integrálu je vždy číslo.

2. Spočítejme $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x\,\mathrm{d}x$. Zavedeme substituci $t = \sin x$ a $\mathrm{d}t = \cos x\mathrm{d}x$ a nezapomene přepočítat meze: pro dolní mez $x = 0$ dostaneme novou dolní mez $t = \sin 0 = 0$ a pro horní mez $x = \frac{\pi}{2}$ dostaneme novou mez $t = \sin\frac{\pi}{2} = 1$. Nyní můžeme integrál spočítat:
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 t^3\,\mathrm{d}t = [\frac{1}{4}t^4]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

3. Pro výpočet $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}\,\mathrm{d}x$ použijeme substituci $r = \ln x$, $\mathrm{d}r = \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ a přepočítáme meze $r = \ln 1 = 0$ resp. $r = \ln e = 1$:
$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 r^2\,\mathrm{d}r = \frac{1}{3}[r^3]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Podobná situace je s metodou perpartes:

Věta 4 *Nechť funkce $u = u(x)$ a $v = v(x)$ mají v $\langle a, b\rangle$ spojité derivace. Potom platí:*
$$\int_a^b uv'\,\mathrm{d}x = [uv]_a^b - \int_a^b u'v\,\mathrm{d}x.$$

Počítáme opět tak, jak jsme zvyklí z neurčitého integrálu. Kromě toho, že používáme určitý integrál, se výpočet liší pouze v tom, že do zintegrovaných částí (které již u sebe neobsahují znak integrálu – součin uv) dosazujeme meze obvyklým způsobem "horní minus dolní".

Příklady:

1.
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,\mathrm{d}x = [x\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} + [\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$
$$\begin{aligned} u &= x & u' &= 1 \\ v' &= \cos x & v &= \sin x \end{aligned}$$

2.
$$\int_1^3 \ln x\,\mathrm{d}x = [x\ln x]_1^3 - \int_1^3 1\,\mathrm{d}x = 3\ln 3 - [x]_1^3 = 3\ln 3 - 2.$$
$$\begin{aligned} u &= \ln x & u' &= \frac{1}{x} \\ v' &= 1 & v &= x \end{aligned}$$

3.
$$\int_0^1 x^2e^{3x}\,\mathrm{d}x = [\frac{1}{3}x^2e^{3x}]_0^1 - \frac{2}{3}\int_0^1 xe^{3x}\,\mathrm{d}x = \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3}\left([\frac{1}{3}xe^{3x}]_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 e^{3x}\,\mathrm{d}x\right) =$$

$$\begin{array}{llcll} u = x^2 & u' = 2x & | & u = x & u' = 1 \\ v' = e^{3x} & v = \dfrac{1}{3}e^{3x} & | & v' = e^{3x} & v = \dfrac{1}{3}e^{3x} \end{array}$$

$$= \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{e^3}{3} - \frac{1}{9}[e^{3x}]_0^1\right) = \frac{e^3}{3} - \frac{2e^3}{9} + \frac{2e^3}{27} - \frac{2}{27} = \frac{5e^3}{27} - \frac{2}{27}.$$

1.4 Cvičení

1.
$$\int_1^4 (6x^3 - 2x + 1)\,\mathrm{d}x$$

2.
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin 2x)\,\mathrm{d}x$$

3.
$$\int_4^9 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$$

4.
$$\int_0^1 xe^{-2x}\,\mathrm{d}x$$

5.
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x\,\mathrm{d}x$$

6.
$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 - 4}\,\mathrm{d}x$$

7.
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2 + \sin x}\,\mathrm{d}x$$

8.
$$\int_0^3 \frac{4x}{x^2 + 1}\,\mathrm{d}x$$

Výsledky:

1. $\dfrac{741}{2}$
2. $\dfrac{\pi - 2}{2}$
3. $\dfrac{38}{3}$
4. $\dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{4e^2}$ (metoda per partes)
5. $\dfrac{\pi^2 - 8}{2}$ (metoda per partes)
6. $-\dfrac{\ln 3}{4}$ (parciální zlomky)
7. $\ln\dfrac{3}{2}$ (substituce $t = \sin x$)
8. $\ln 100$ (substituce $t = x^2 + 1$)

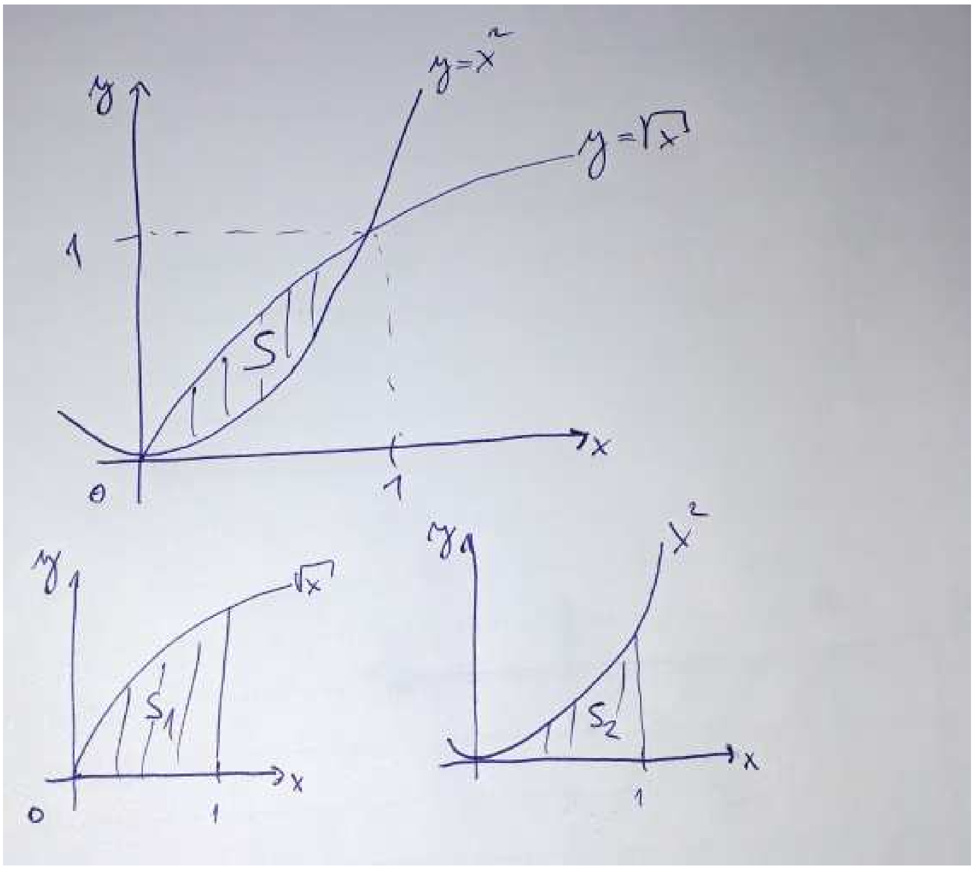
2 Užití určitého integrálu

2.1 Obsah rovinného obrazce

Určitý integrál se používá k výpočtu plošného obsahu rovinného obrazce. Pokud jde o obrazec ohraničený osou x a grafem $y = f(x)$ pro $x \in \langle a, b\rangle$, vycházíme přímo z definice integrálu. Je třeba hlídat znaménko, pro záporné hodnoty $f(x)$ se obsah započítává se znaménkem minus. Integrál takto funguje, ale pokud máme za úkol počítat obsah, musíme to opravit.

Máme-li určit plošný obsah S mezi osou x a grafem $f(x) = x^2 - 1$ pro $x \in \langle 0, 3\rangle$, je třeba si uvědomit, pro která x je graf $f(x)$ kladný resp. záporný. (Nakreslete si obrázek!) Na daném intervalu máme jediný nulový bod $x = 1$. Pro $x \in \langle 0, 1\rangle$ je $f(x) \le 0$ a obsah tak integrál započítává se znaménkem minus, znaménko proto musíme otočit. Obsah této části je $S_1 = -\int_0^1 (x^2 - 1)\,\mathrm{d}x = -\left[\frac{x^3}{3} - x\right]_0^1 = \dfrac{2}{3}$. Pro $x \in \langle 1, 3\rangle$ je $f(x) \ge 0$ a obsah této části je přímo roven integrálu: $S_2 = \int_1^3 (x^2 - 1)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^3 = \dfrac{20}{3}$. Pro celý obsah tak dostáváme $S = S_1 + S_2 = \dfrac{2}{3} + \dfrac{20}{3} = \dfrac{22}{3}$.

Spočítejme nyní plošný obsah mezi grafy $g(x) = x^2$ a $f(x) = \sqrt{x}$. Na obrázku vidíme, že oba grafy se protínají v $x = 0$ a v $x = 1$. Mezi těmito hodnotami vzniká ohraničený obrazec, jehož plošný obsah chceme spočítat. Hledaný obsah získáme jako rozdíl obsahů mezi $f(x) = \sqrt{x}$ a osou x (větší obsah S_1) a mezi $g(x) = x^2$ a osou x (menší obsah S_2). $S = S_1 - S_2 = \int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,\mathrm{d}x = [\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \dfrac{1}{3}x^3]_0^1 = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}$.



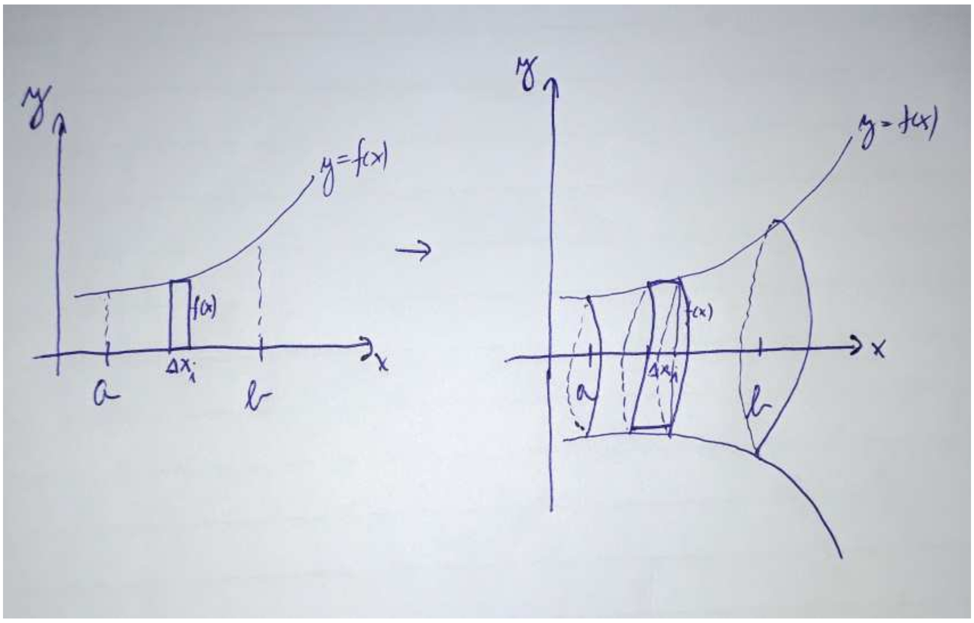
Postup použitý v předchozí úloze funguje zcela obecně: Obsah S obrazce mezi grafy spojitých funkcí $y = f(x)$ a $y = g(x)$ pro $x \in \langle a, b\rangle$, platí-li $f(x) \geq g(x)$ pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$ spočítáme jako

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, \mathrm{d}x.$$

Daný vzorec platí bez ohledu na znaménka funkcí $f(x)$ nebo $g(x)$. Důležitá je pouze podmínka $f(x) \geq g(x)$.

2.2 Objem rotačního tělesa

Představme si, že rovinný obrazec ohraničený osou x, přímkami $x = a$, $x = b$ a grafem funkce $y = f(x)$ začne rotovat kolem osy x. Vznikne tak tzv. rotační těleso. Např. rotací obdélníku kolem jedné jeho strany vznikne válec. Objem takového tělesa se dá poměrně snadno počítat pomocí integrálu. Vraťme se k definici integrálu a tomu, že obsah pod grafem $y = f(x)$ počítáme přibližně jako součet obsahů obdélníků. Vyberme si jeden dílčí obdélník, jedna jeho strana (dolní vodorovná) leží na ose x, označme její velikost Δx. Výška obdélníku je určena funkční hodnoutou $f(x)$ v libovolném bodu x ležícím v podstavě. Jestliže tento obrazec a jeho přibližné vyjádření pomocí obdélníků budeme rotovat kolem osy x, dostaneme rotační těleso a jeho přibližné vyjádření pomocí válců. Objem válce odpovídající našemu vybranému obdélníku je $\pi f^2(x)\Delta x$ $(\pi r^2 v)$.



Stejnými úvahami o posloupnosti zlepšujících se odhadů nakonenec dojdeme k tomu, že objem V tělesa, které vznikne rotací obrazce ohraničeného osou x, přímkami $x = a$, $x = b$ a grafem funkce $y = f(x)$, spočítáme

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, \mathrm{d}x.$$

Spočítejme objem tělesa vzniklého rotací části paraboly $y = \sqrt{x}$ pro $x \in \langle 0, 2\rangle$ kolem osy x. (Nakreslete si obrázek!) Dle předchozího vztahu objem vypočítáme jako

$$V = \pi \int_0^2 \left(\sqrt{x}\right)^2\, \mathrm{d}x = \pi \int_0^2 x\, \mathrm{d}x = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 2\pi.$$

Takovéto těleso se nazývá rotační paraboloid.

Odvoďme si nyní vzorec pro výpočet objemu kuželu o výšce v a poloměru podstavy R. Takový kužel vznikne např. rotací přímky procházející počátkem. Kromě toho potřebujeme, aby pro $x = v$ vyšlo $y = R$. Přímka s danými vlastnostmi je $y = \frac{R}{v}x$. Objem kuželu vzniklého rotací takové přímky je pak:

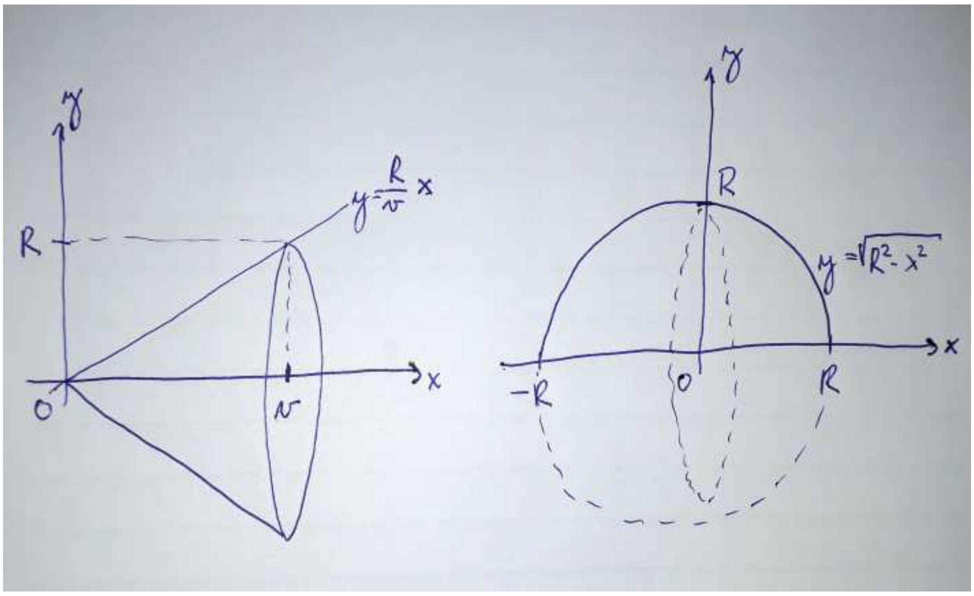
$$V = \pi \int_0^v \frac{R^2}{v^2} x^2 \, \mathrm{d}x = \pi \frac{R^2}{v^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^v = \pi \frac{R^2}{v^2} \frac{v^3}{3} = \frac{1}{3} \pi R^2 v,$$

což je opravdu známý vorec na výpočet objemu kuželu. V integrálu integrujeme podle x, to poznáme podle toho, že integrál končí dx. Všechna ostatní písmena (R, v) značí konstanty a zacházíme s nimi tedy jako s konstantami: zlomek $\frac{R^2}{v^2}$ jsme opsali a integrovali jsme jen x^2.

Podobným způsobem můžeme získat vzorec pro výpočet objemu koule. Koule vznikne rotací kružnice. Víte, grafem jaké funkce je kružnice? Resp. horní půlkružnice, v grafu funkce jak známo nemůžou být dva body nad sebou, takže celá kružnice není grafem žádné funkce. Vyjdeme z toho, že rovnice kružnice se středem v počátku a s poloměrem R je $x^2 + y^2 = R^2$. Z toho vyjádříme $y^2 = R^2 - x^2$ a odmocněním $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ a $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$. Toto jsou dvě funkce, jejichž grafy jsou horní resp. dolní půlkružnice. Rotací např. horní půlkružnice pak vznikne celá koule. Její objem bude podle výše uvedeného vztahu:

$$V = \pi \int_{-R}^{R} \left(\sqrt{R^2 - x^2} \right)^2 \mathrm{d}x = \pi \int_{-R}^{R} \left(R^2 - x^2 \right) \mathrm{d}x = \pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-R}^{R} = \pi \left(\frac{2}{3} R^3 + \frac{2}{3} R^3 \right) = \frac{4}{3} \pi R^3,$$

což je opět výsledek, který jsme očekávali. R značí poloměr koule, je to konstanta a ve výpočtu tak s R zacházíme jako s číslem.



2.3 Cvičení

1. Spočítejte obsah obrazce ohraničeného parabolou $y = x^2 - 5x$ a osou x.
2. Spočítejte obsah obrazce mezi $y = x^2$ a $y = x^3$.
3. Spočítejte obsah mezi grafem $y = \dfrac{1}{x}$ a osou x ohraničený $x = 1$ a $x = 3$.
4. Spočítejte obsah obrazce mezi parabolami $y = x^2 - 1$ a $y = -x^2 + 10x - 13$.
5. Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací $y = x^2 + 1$ kolem osy x pro $x \in \langle -1, 1\rangle$.
6. Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací $y = sinx$ kolem osy x pro $x \in \langle 0, \pi\rangle$.
7. Odvoďte vzorec pro výpočet objemu komolého rotačního kuželu s výškou v a s poloměry podstav r a R.

Výsledky:

1. $\dfrac{125}{6}$
2. $\dfrac{1}{12}$
3. $\ln 3$
4. $\dfrac{1}{3}$
5. $\dfrac{56}{15}\pi$
6. $\dfrac{\pi^2}{2}$
7. $\dfrac{1}{3}\pi v(r^2 + rR + R^2)$ (Vhodná přímka je např. $y = \dfrac{R - r}{v}x + r$.)