INTEGRAČNÍ OBORY V KARTÉZSKÝCH SOUŘADNICÍCH V $\mathbb{R}^2$

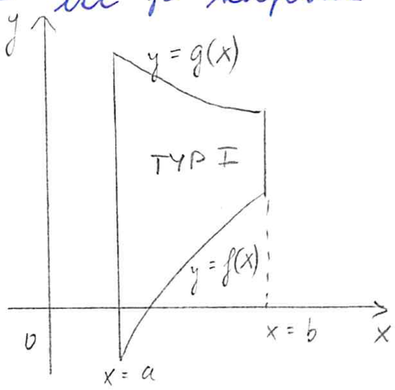
1) OBRAZCE TYPU I
- obrazec mezi grafy spojitých funkcí $y = f(x)$, $y = g(x)$ a rovnoběžkami $x = a$, $x = b$, kde $f(x) \le g(x)$, $a < b$ zapisujeme soustavou nerovností:

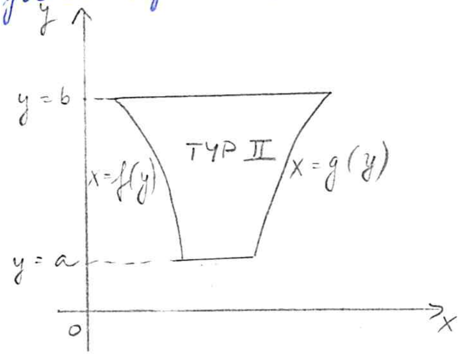
$$a \le x \le b$$
$$f(x) \le y \le g(x)$$

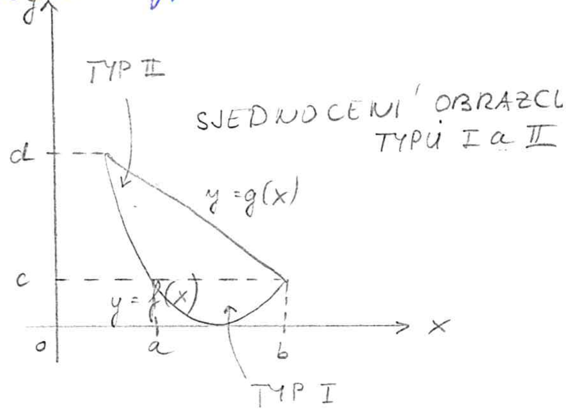
2) OBRAZCE TYPU II
- obrazec mezi grafy spojitých funkcí $x = f(y)$, $x = g(y)$ a rovnoběžkami $y = a$, $y = b$, kde $f(y) \le g(y)$, $a < b$ zapisujeme soustavou nerovností:

$$a \le y \le b$$
$$f(y) \le x \le g(y)$$

3) OBRAZCE, KTERÉ NEJSOU ŽÁDNÝM Z VÝŠE UVEDENÝCH TYPŮ
- lze je zapsat jako sjednocení obrazců typů I a II



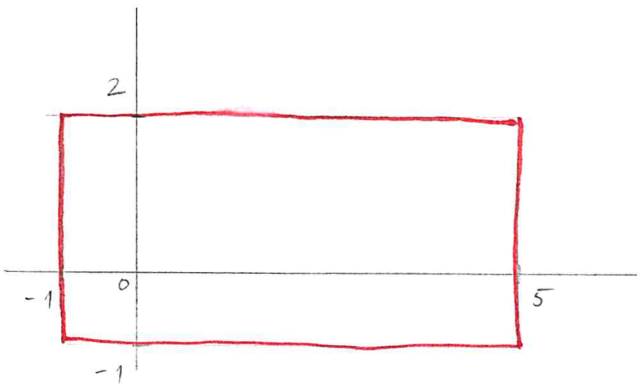




PŘÍKLAD 1

Zapište jako obrazec typu I i II, příp. jako jejich sjednocení:

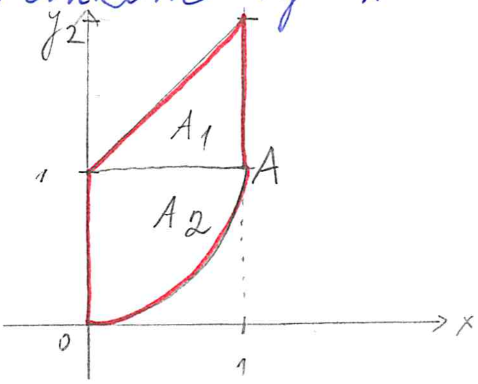
a) obdélník o vrcholech $[-1; -1]$, $[5; -1]$, $[5; 2]$, $[-1; 2]$



obrazec typu I a současně typu II:

$$\boxed{\begin{aligned} -1 \le x \le 5 \\ -1 \le y \le 2 \end{aligned}}$$

b) obrazec ohraničený přímkami $x = 0, x = 1, x - y + 1 = 0$ a obloukem $y = x^2$



$x - y + 1 = 0$

$y = x + 1$

obrazec typu I:

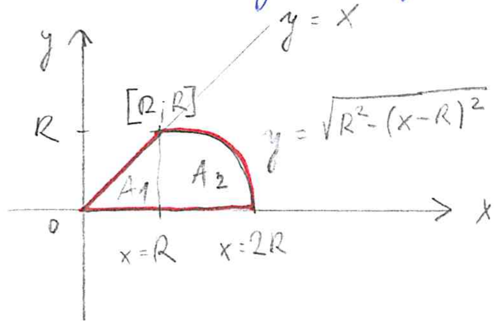
$$\boxed{\begin{array}{l} 0 \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le x+1 \end{array}}$$

sjednoc. obrazců typu II:

$A = A_1 \cup A_2$

$A_1: \; 1 \le y \le 2, \quad y-1 \le x \le 1$; $A_2: \; 0 \le y \le 1, \quad 0 \le x \le \sqrt{y}$

c) obrazec ohraničený horní půlkružnicí $(x-R)^2 + y^2 = R^2$ a přímkami $y = x, y = 0$



$y = x \wedge (x-R)^2 + y^2 = R^2$:

$(x-R)^2 + x^2 = R^2$

$x^2 - 2Rx + \cancel{R^2} + x^2 = \cancel{R^2}$

$2x^2 = 2Rx \quad | : 2x$

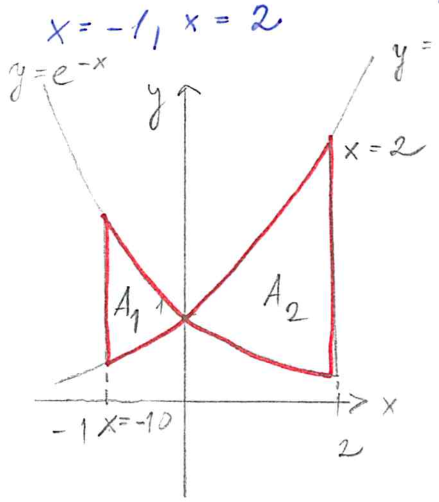
$x = R, \; y = R$

$A = A_1 \cup A_2$

$A_1: \; 0 \le x \le R, \quad 0 \le y \le x$; $A_2: \; R \le x \le 2R, \quad 0 \le y \le \sqrt{R^2-(x-R)^2}$

$= \sqrt{-x^2+2Rx}$

d) obrazec ohraničený grafy funkcí $y = e^x, y = e^{-x}$ a rovnoběžkami $x = -1, x = 2$

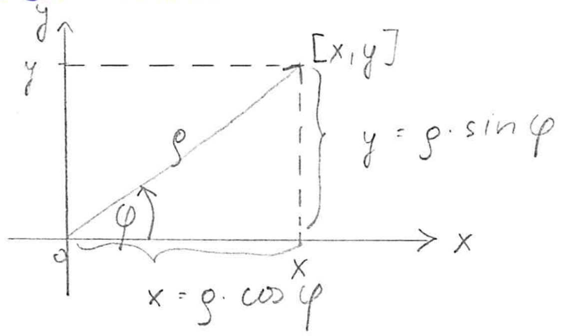


$A = A_1 \cup A_2$

$A_1: \; -1 \le x \le 0, \quad e^x \le y \le e^{-x}$; $A_2: \; 0 \le x \le 2, \quad e^{-x} \le y \le e^x$

INTEGRAČNÍ OBORY V POLÁRNÍCH SOUŘADNICÍCH V $\mathbb{R}^2$

– každý bod roviny zadaný dvojicí $[x, y]$ kartézských souřadnic lze zadat dvojicí $[\varrho, \varphi]$, kde ϱ vyjadřuje vzdálenost bodu od počátku soustavy souřadnic a φ je velikost orientovaného úhlu, jehož počáteční rameno je kladná poloosa x a koncové rameno je průvodič tohoto bodu



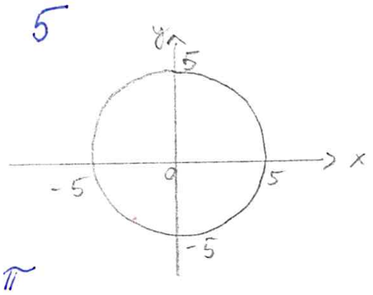
vztah mezi souřadnicemi bodu v těchto soustavách je:

$$x = \varrho \cdot \cos\varphi, \quad y = \varrho \cdot \sin\varphi$$

PŘÍKLAD

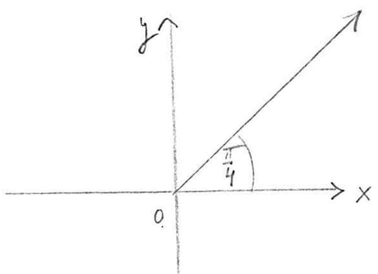
Zjistěte, jaká křivka je v polárních souřadnicích určena rovnicí:

a) $\varrho = 5$



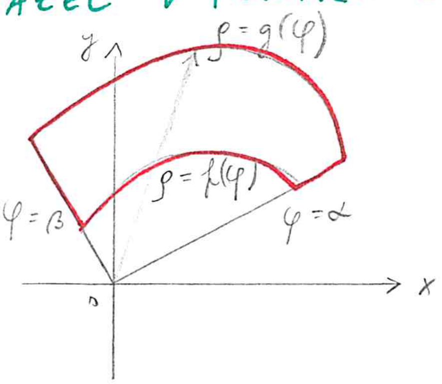
$\boxed{x^2 + y^2 = 25}$

b) $\varphi = \frac{\pi}{4}$



$\boxed{y = x}$

OBRAZEC V POLÁRNÍCH SOUŘADNICÍCH



zapisujeme soustavou nerovností:

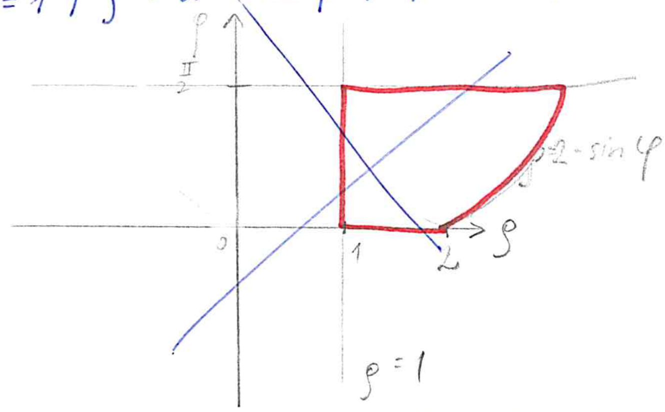
$$\alpha \le \varphi \le \beta$$

$$f(\varphi) \le \varrho \le g(\varphi)$$

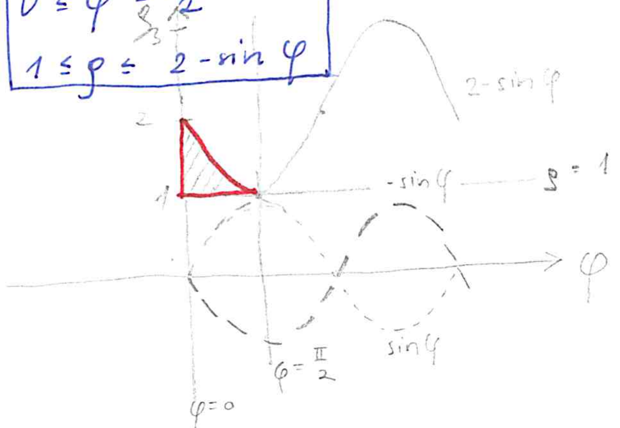
PŘÍKLAD

Načrtněte v rovině $\varrho\varphi$ a vyjádřete nerovnostmi obor ohraničený křivkami:

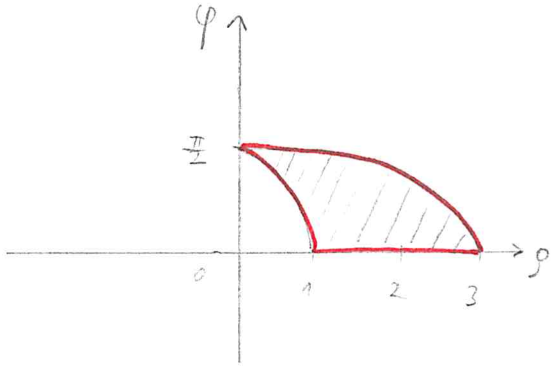
a) $\varrho = 1,\ \varrho = 2 - \sin\varphi,\ \varphi = 0,\ \varphi = \frac{\pi}{2}$



$$\boxed{\begin{array}{l} 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \\ 1 \le \varrho \le 2 - \sin\varphi \end{array}}$$



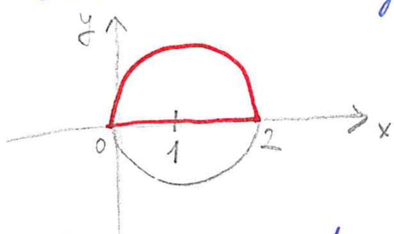
b) $\varrho = 3\cos\varphi,\ \varrho = \cos\varphi,\ \varphi = 0,\ \varphi = \frac{\pi}{2}$



$$\boxed{\begin{array}{l} 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \\ \cos\varphi \le \varrho \le 3\cos\varphi \end{array}}$$

PŘÍKLAD

Transformujte pomocí polárních souřadnic obor ohraničený křivkami:



a) $x^2 + y^2 - 2x = 0$, nad osou x

$x^2 + y^2 - 2x = 0$

$(x^2 - 2x + 1) - 1 + y^2 = 0$

$(x-1)^2 + y^2 = 1$ ... rce kružnice se středem $[1;0]$ a $r = 1$

$x = \varrho \cdot \cos\varphi,\ y = \varrho \cdot \sin\varphi$: $(\varrho\cos\varphi - 1)^2 + (\varrho\sin\varphi)^2 = 1$

$\varrho^2\cos^2\varphi - 2\varrho\cos\varphi + 1 + \varrho^2\sin^2\varphi = 1$

$\varrho^2 - 2\varrho\cos\varphi = 0$

$\varrho(\varrho - 2\cos\varphi) = 0$

$\varrho = 0 \lor \varrho = 2\cos\varphi$

$$\boxed{\begin{array}{l} 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le \varrho \le 2\cos\varphi \end{array}}$$