Laplaceova transformace

Funkci $f(t)$ (tzv. předmět) definované na $(0, +\infty)$ přiřazujeme funkci

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt \quad \text{(tzv. Laplaceův obraz)}$$

Obráceně $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))$ (tzv. zpětná transformace)

---

integrál existuje pro $f(t)$, která má na $(0, +\infty)$ konečný počet nespojitostí takových, že v těchto bodech existují konečné jednostranné limity a existují čísla M, α, t_0 taková, že $t > t_0$ je $f(t) \leq M \cdot e^{\alpha t}$

Hledáme Laplaceův obraz $f_1(t) = 1$

$$\mathcal{L}(1) = \int_0^{+\infty} 1\, e^{-st}\, dt = \lim_{A \to +\infty} \int_0^A e^{-st}\, dt = \lim_{A \to +\infty} \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^A =$$

$$= -\frac{1}{s} \lim_{A \to +\infty} \left(\underbrace{e^{-sA}}_{0} - 1 \right) = \frac{1}{s} = F_1(s)$$

$f_2(t) = e^{-t}$

$$\mathcal{L}(e^{-t}) = \int_0^{+\infty} e^{-t} e^{-st}\, dt = \lim_{A \to +\infty} \int_0^A e^{-t(1+s)}\, dt = \lim_{A \to +\infty} \left[\frac{-1}{1+s} e^{-t(1+s)} \right]_0^A =$$

$$= \frac{-1}{1+s} \left(0 - 1 \right) = \frac{1}{s+1} = F_2(s)$$

Linearita: $\mathcal{L}(f+g) = \mathcal{L}(f) + \mathcal{L}(g)$

$$\mathcal{L}(\alpha \cdot f) = \alpha \mathcal{L}(f), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\downarrow$$

$$\mathcal{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{L}(f) + \beta \mathcal{L}(g), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{L}(1 + 3t^2) = \mathcal{L}(1) + 3\mathcal{L}(t^2) = \frac{1}{s} + 3\frac{2}{s^3}$$

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}(t^2) = \mathcal{L}\left(\frac{t^2}{2!}\right) = \frac{1}{s^3}$$ slovník

$$\mathcal{L}(t^2) = \frac{2}{s^3}$$

$$\mathcal{L}(\sin 2t) = \frac{2}{s^2+4} \qquad \mathcal{L}\left(\frac{1}{2}\sin 2t\right) = \frac{1}{s^2+4}$$

$$\mathcal{L}(\cos 7t) = \frac{s}{s^2+49}$$

Zpětná transformace :

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \sin t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+9)^2}\right) = \frac{t\sin 3t}{6}$$

Pracujeme s funkcemi, jejichž obrazy jsou racionální funkce. Po zpětnou transformaci rac. funkce

1) hledáme ve slovníku
pokud nenajdeme
2) rozklad na parciální zlomky

Posunutí v obraze: $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$, je

$$\mathcal{L}\left(e^{-at} f(t)\right) = F(s+a)$$

Protože $\mathcal{L}(\cos 3t) = \dfrac{s}{s^2+9}$

$$\mathcal{L}\left(e^{-2t}\cos 3t\right) = \frac{s+2}{(s+2)^2+9}$$

(jak lze nalézt i přímo ve slovníku)

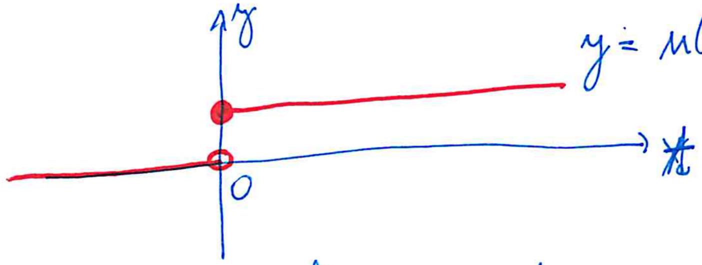
Posunutí v předmětu: $\mathcal{L}(\cancel{t}\, f(t)) = F(s)$ je

$$\mathcal{L}\big(f(t-a)\,u(t-a)\big) = e^{-as}F(s)$$

$u(t) = 0 \quad t < 0$

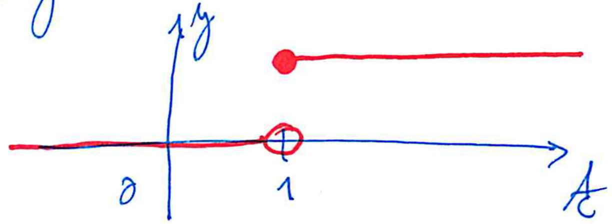
$u(t) = 1 \quad t \geq 0$

$y = u(t)$

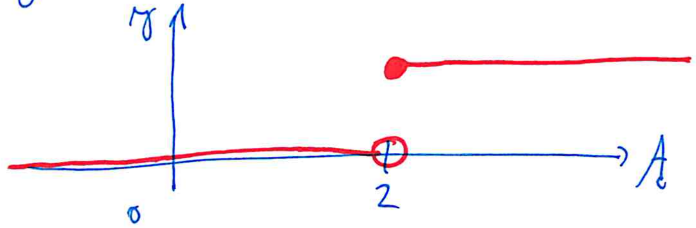


Heavisidova schodovitá funkce

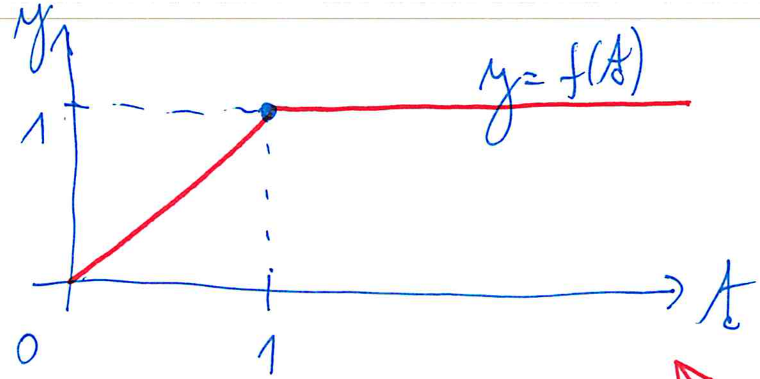
$y = u(t-1)$



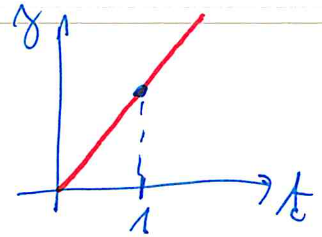
$y = u(t-2)$



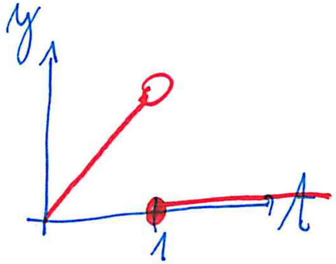
Příklad:



1) $y = t$



2) $y = t - t\,u(t-1)$



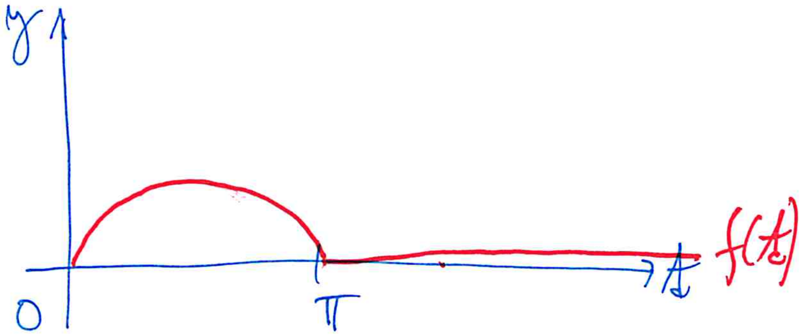
3) $y = t - t\,u(t-1) + u(t-1) =$

$$\boxed{= t - u(t-1)(t-1) = f(t)}$$

$$\mathcal{L}\big(f(t)\big) = \frac{1}{s^2} - e^{-s}\frac{1}{s^2}$$

Příklad: $f(t) = \sin t \quad t \in (0, \pi\rangle$

$f(t) = 0 \quad t > \pi$



$$f(t) = \sin t - \sin t \, u(t-\pi)$$

$$\sin(t-\pi) = -\sin t$$

$$\downarrow$$

$$f(t) = \sin t + \sin(t-\pi)\, u(t-\pi)$$

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} e^{-\pi s}$$

Obraz derivace

Nechť $f(t)$ a $f'(t)$ jsou tzv. předměty standardního typu a $f(t)$ je spojitá na $(0,+\infty)$. Označme $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ a $f(0+) = \lim_{t \to 0^+} f(t)$, platí

$$\mathcal{L}(f'(t)) = s \cdot F(s) - f(0+)$$

pro 2. derivaci

$$\mathcal{L}(f''(t)) = s\left(sF(s) - f(0+)\right) - f'(0+) =$$

$$= s^2 F(s) - s f(0+) - f'(0+)$$