1 Gaussova eliminační metoda

V této kapitole se budeme zabývat řešením soustav lineárnách algebraických rovnic. K přesné definici takové soustavy se dostaneme později až probereme matice. Nyní si vystačíme s tím, že jsou to rovnice, kde neznámé jsou čísla (v našem případě vždy reálná) a v rovnici se tyto neznámé vykytují pouze v první mocnině a nejsou v argumentu žádné složitější funkce (tj. jsou-li x a y neznámé, v rovnicích se nevyskytuje např. x^3, xy nebo $\sin x$. Soustava lineárních algebraických rovnic je třeba:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ x + 2y - z &= 2 \\ 2x + 3y + 3z &= 17. \end{aligned}$$

Vyřešit takovou soustavu znamená najít všechny takové trojice čísel, pro které budou po dosazení za neznámé x, y a z platit rovnosti ve všech rovnicích.

S takovýmito soustavami jsme se setkali při hledání konstant pro rozklad na parciální zlomky a viděli jsme, že nahodilá aplikace metod, které znáte ze střední školy: sčítací a dosazovací, může vést k dost nepřehledným situacím již pro počet neznámých větších než tři. Je proto třeba do řešení takových soustav zavést nějaký řád. Řešení soustav je důležité i ve výpočetní praxi, protože tzv. numerické metody někdy umožňují řešit i velmi složité rovnice přibližně pomocí soustavy lineárních algebraických rovnic. Počet takových rovnic může ale být obrovský a výpočet problematický i při využití výpočetní techniky.

1.1 Maticový zápis soustavy

Při řešení soustav si v podstatě i nadále vystačíme s metodami sčítací a dosazovací, seznámíme se ale s agloritmem, který do řešení vnese systém. Než se budeme zabývat samotným algoritmem, seznámíme se s novým spůsobem zápisu soustavy, který je přehlednější a vhodnější pro výpočty, které se chceme naučit. Vezměme si soustavu

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ x + 2y - z &= 2 \\ 2x + 3y + 3z &= 17. \end{aligned}$$

Pokud odečteme první rovnici od druhé a poté odečteme dvojnásobek první rovnice od třetí, dostaneme

$$\begin{aligned} y - 2z &= -4 \\ y + z &= 5, \end{aligned}$$

díky tomu jsme dostali menší soustavu pro y a z. Po odečtení první (nové) od druhé (nové) rovnice pak dostaneme $3z = 9$ neboli $z = 3$. Zbývající neznámé už dopočítáme snadno. Vidíme, že sčítáním rovnic získáváme další rovnice, které dál a dál opisujeme. Naše soustava byla ještě poměrně malá, ale pro více rovnic a více neznámých by takového opisování bylo mnohem víc. Ukazuje se proto jako výhodné neopisovat celé rovnice ale pouze koeficienty u jednotlivých neznámých. Nesmíme ale potom samozřejmě pořadí neznámých měnit. Řešenou soustavu pak zapíšeme takto (vlevo původní zápis soustavy, vpravo nový zápis pomocí tzv. matice):

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ x + 2y - z &= 2 \\ 2x + 3y + 3z &= 17 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 17 \end{array}\right].$$

Tabulka čísel, která má (v tomto konkrétním příkladu, rozměry se můžou lišit) tři řádky a čtyři sloupce a je ohraničená hranatou závorkou, se nazývá matice. Porovnejte si zápis soustavy klasicky pomocí rovnic a zápis pomocí matice. První řádek matice odpovídá první rovnici. Protože rovnice je $1x+1y+1z=6$. U neznámých x, y a z jsou pořadě koeficienty 1, 1 a 1, na pravé straně je 6, v matici se čísla na pravé straně píšou za svislou čáru před posledním sloupečkem. Příslušný řádek matice proto je $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right]$.

Se soustavou zapsanou pomocí matice pak můžeme provádět následující tzv. **elementární úpravy**:

1. výměna řádků,
2. vynásobení řádku nenulovou konstantou,
3. přičtení násobku řádku k jinému řádku,
4. vyškrtnutí nulového řádku.

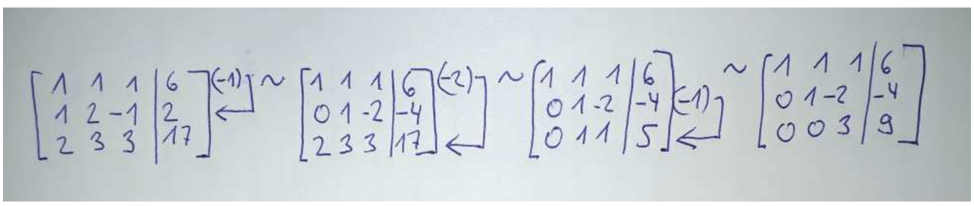
V řeči soustav rovnic to znamená:

1. Výměna řádků v matici znamená změnu pořadí rovnic v soustavě. Na pořadí rovnic nijak nezáleží a můžeme ho libovolně měnit, proto můžeme také měnit pořadí řádků.
2. Každou rovnici můžeme vynásobit nenulovou konstantou: rovnice $x+y=1$ je "stejná" (lépe řečeno ekvivalentní, má stejné řešení) jako její dvojnásobek $2x+2y=2$. To samé můžeme provádět s řádky matice.
3. Přičtení násobku řádku k jinému řádku znamená přičtení násobku rovnice k jiné rovnici. To je sčítací metoda.
4. Nulový řádek je rovnice $0=0$. Taková rovnice nemá na řešení soustavy žádný vliv a můžeme jí vynechat/vyškrtnout.

Prováděním těchto elementárních úprav matici (soustavu) postupně upravujeme do tvaru, který se nám hodí (viz dále). Tyto úpravy nemění řešení soutavy, které tak v průběhu řešení zůstává stejné, což samozřejmě potřebujeme. Dostáváme tak postupně další a další soustavy, které se od té původní liší, mají ale stále stejné řešení. Říkáme, že jsou ekvivalentní a zapisujeme symbolem $\sim$. Řešení soustavy z předchozího příkladu pak zapíšeme následujícím způsobem:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 17 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & 3 & 17 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right]$$

V psaném textu znázorňujeme šipkami, jakou úpravu provádíme, např. jaký násobek jakého řádku přičítáme kam. Celý postup se pak dá snáze číst:



Po provedení výpočtu dostáváme matici, která odpovídá soustavě:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ y - 2z &= -4 \\ 3z &= 9. \end{aligned}$$

Takovouto soustavu řešíme vždy postupně od poslední rovnice tzv. zpětným dosazením. Z poslední rovnice vidíme $z = 3$. Posuneme se o rovnici výš: jakmile víme, že $z = 3$, z druhé rovnice snadno dopočítáme $y = 2$. A známe-li y a z, stejně jednoduše z první rovnice dopočítáme $x = 1$. Ukázali jsme, jak se s maticí reprezentující soustavu pracuje, nyní potřebujeme vědět, jaký cíl předvedenými úpravami sledujeme.

1.2 Odstupňovaný tvar matice

Výsledek předchozí úlohy ukazuje, jaký tvar soustavy považujeme za ideální. Naše úpravy by měly směřovat k tomu, aby v rovnicích postupně ubývaly neznámé nejlépe tak, aby z poslední rovnice šla jedna neznámá vypočítat. Říkáme, že matice, která má takovýto tvar je v odstupňovaném tvaru. Přesněji: matice je v odstupňovaném tvaru, pokud každý další řádek obsahuje v souvislé řadě nul od začátku řádku do prvního nenulového čísla alespoň o jednu nulu více než předchozí řádek. Matice navíc neobsahuje nulové řádky.

Snažíme se tedy vytvářet nuly na začátku řádku tak, aby vznikly jakési schody z nul a na každém dalším řádku bylo minimálně o jednu nulu víc. Každá matice se dá pomocí elementárních úprav do odstupňovaného tvaru převést.

Matice

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right]$$

je v odstupňovaném tvaru, protože každý další řádek obsahuje zleva více nul, než předchozí řádek: 1. řádek žádná nula, 2. řádek jedna nula a 2. řádek dvě nuly.

Matice

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right]$$

v odstupňovaném tvaru není, protože 2. řádek obsahuje zleva dvě nuly (případné další nuly za prvním nenulovým číslem se nepočítají) a 3. řádek obsahuje rovněž dvě nuly. Protože každá matice se dá převést na odstupňovaný tvar, dá se ještě v eliminaci pokračovat a požadovaný tvar získat. Rozmyslete si jak!

Existuje více možností, jak odstupňovaný tvar vyrobit. Vezměme si matici

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right].$$

Pro odstupňovaný tvar potřebujeme získat nulu na první pozici v druhém řádku (označeno červeně). Můžeme toho dosáhnout tak, že k druhému řádku přičteme první řádek vynásobený $-\dfrac{1}{2}$ (přičtení násobku řádku k jinému řádku):

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & -3 \end{array}\right].$$

Taková úprava ale není příliš šikovná, protože v matici vznikly zlomky a tomu se s ohledem na další výpočty zpravidla snažíme vyhnout. Situace se dá případně zachránit tak, že druhý řádek vynásobíme dvěma (vynásobení řádku nenulovou konstantou):

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & -5 & -6 \end{array}\right].$$

Další možnost je, že v původní matici nejprve vynásobíme druhý řádek dvěma (vynásobení řádku nenulovou konstantou) a pak k druhému řádku přičteme první řádek vynásobený -1 (takže první řádek odčítáme):

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & -4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & -5 & -6 \end{array}\right].$$

Tím jsme se zlomkům vyhnuli úplně. Možností je celá řada. Můžeme ještě např. nejdřív vyměnit první a druhý řádek a potom k druhému řádku přičíst první řádek vynásobený -2:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 6 \end{array}\right].$$

Odstupňovaný tvar není určen jednoznačně. Důležité je, aby výsledné matice byly ekvivalentní a příslušné soustavy měly shodné řešení.

Odstupňovaný tvar je nutné pomocí elementárních úprav vytvářet systematicky. Začneme tak, že pod číslem v levém horním rohu vytvoříme sloupec nul tak, že vhodný násobek prvního řádku postupně odečteme od všech zbývajících řádků. To můžeme udělat v případě, že na pozici v levém horním rohu není nula. Pokud tam nula je, vyměníme první řádek s libovolným jiným řádkem, který na první pozici nulu neobsahuje. Pokud je nula v prvním sloupečku ve všech řádcích, přesuneme se do dalšího sloupečku. Máme-li tento krok hotov, postupujeme stejným způsobem dále. Posuneme se do druhého řádku a druhého sloupečku. Pokud tam nula není, vytvoříme pomocí elementárních úptav pod tímto číslem nuly. (Nesmíme ale použít první řádek a změnit nuly v prvním sloupci.) Pokud tam nula je, vyměníme tento řádek s jakýmkoliv dalším řádkem, kde nula v druhém sloupečku není. Pokud jsou nuly všude, posuneme se do dalšího sloupečku. A takto pokračujeme dokud není matice v odstupňovaném tvaru. Celý postup bude nejlepší ilustrovat na příkladu, převeďme do odstupňovaného tvaru následující matici:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & -5 \end{array}\right]$$

Protože v levém horním rohu je nula, vyměníme nejprve první a druhý řádek. To zapíšeme takto:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & -5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & -5 \end{array}\right]$$

Nyní můžeme dokončit první sloupec nul a odečteme první řádek od třetího a od čtvrtého řáku:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & -5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & -5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & -10 \end{array}\right]$$

Nyní máme hotový "první schod"a posuneme se o řádek níž do druhého řádku. Vidíme, že v druhém sloupečku ve druhém řádku je nula. Protože je v druhém sloupečku nula i ve všech dalších řádcích směrem dolů, nelze výměnou řádků na této pozici získat nenulové číslo a posunujeme se do třetího sloupečku a pod (zeleným) číslem dva chceme vyrobit nuly:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & -10 \end{array}\right].$$

Vynásobíme třetí řádek dvěma a dostaneme:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & -10 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & -10 \end{array}\right].$$

Odečteme druhý řádek od třetího a čtvrtého:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & -10 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & -14 \end{array}\right].$$

Zbývá poslední krok. Opět se posuneme o řádek níž a pod prvním nenulovým číslem (-7) vyrobíme nulu. Od čtvrtého řádku odečteme třetí:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & -14 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Poslední řádek obsahuje samé nuly, které vyškrtneme, a můžeme napsat původní matici a výsledný odstupňovaný tvar:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & -5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & -14 \end{array}\right].$$

Tento tvar matice představuje optimální tvar soustavy rovnic zadané touto maticí. V tuto chvíli už nezbývá nic jiného, než se vrátit k rovnicím a soustavu dořešit. Zkuste si to! Za povšimnutí stojí, že v matici jsme vyškrtli jeden řádek. V průběhu eliminace jsme tedy zjistili, že daná soustava obsahuje pouze tři (tzv. nezávislé) rovnice. Jedna rovnice byla v původním zadání "navíc". Co to znamená pro řešení soustavy se dozvíte v další kapitole.

1.3 Cvičení

Vyřešte pomocí eliminační metody všechny soustavy, které jste řešili v minulých cvičeních u rozkladu na parciální zlomky.

1.4 Počet řešení soustav lineárních algebraických rovnic

Všechny soustavy, které jste zatím řešili např. v kapitole o rozkladnu na parciální zlomky, měly právě jedno řešení. Naskýtá se otázka, zda je tak tomu vždy. Odpověď zní, že není. Např. soustava

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x + y &= 2 \end{aligned}$$

nemá žádné řešení, protože $x+y$ nemůže být současně 1 i 2. Počet řešení tedy může být 0. Může být řešení i více? Soustava

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ 2x + 2y &= 2 \end{aligned}$$

má řešení $x = 1$ a $y = 0$, jak snadno ověříme tím, že do obou rovnic dosadíme (zkouška). Stejně tak ale funguje $x = 0$ a $y = 1$ nebo třeba $x = 10$ a $y = -9$. Ve skutečnosti má tato soustava nekonečně mnoho řešení. Tuto skutečnost zachycujeme pomocí parametrů. Pokud x nabývá libovolnou reálnou hodnotu t, budou rovnice fungovat pro $y = 1 - t$. Řešení zapisujeme $x = t$, $y = 1 - t$ pro $t \in \mathbb{R}$.

Je evidentní, že nekonečný počet řešení je způsobem tím, že obě rovnice jsou "skoro stejné". Druhá rovnice je dvojnásobkem první. Během eliminace by se jedna rovnice vyškrtla a zbyla by jen jedna tzv. nezávislá rovnice (více až budeme probírat lineární závislost a nezávislost). Pokud je rovnic méně než je počet neznámých, můžou "přebývající" neznámé nabývat libovolných hodnot a soustava bude mít buď nekonečně mnoho řešení nebo žádné řešení, pokud rovnice povedou ke sporu. Ptáme-li se tedy na počet řešení soustavy lineárních algebraických rovnic, jsou tři možnosti (pokud se pohybujeme v $\mathbb{R}$): žádné řešení, jedno řešení a nekonečně mnoho řešení. Jak při řešení poznáme, o jakou variantu se jedná? Uvidíme, že právě eliminační metoda nám s odpovědí na tuto otázku pomůže i u poměrně složitých soustav.

Vyřešme soustavu zadanou maticí:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & -1 & -4 \end{array}\right].$$

Pomocí eliminace převedeme matici na odstupňovaný tvar:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & -1 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & -4 & 0 & -4 & -8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right],$$

kde v posledním kroku jsme kromě vyškrtnutí nulových řádků také vynásobili druhý řádek číslem $-\frac{1}{2}$. Po eliminaci vidíme, že nám zůstaly pouze dvě nezávislé rovnice pro čtyři neznámé. Vrátíme se k rovnicím (neznámé označíme třeba a, b, c, d):

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= 4 \\ b + d &= 2. \end{aligned}$$

Máme-li soustavu (resp. matici) v odstupňovaném tvaru, řešíme vždy zdola nahoru od poslední rovnice. Vidíme, že v poslední rovnici máme dvě neznámé b a d. Je tedy jasné, že když jedna z nich, např. d, bude nabývat libovolnou hodnotu, vždy najdeme správnou hodnotu pro neznámou b, aby rovnice byla splněna. To zapíšeme tak, že d zvolíme jako parametr: $d = t$

pro $t \in \mathbb{R}$. Potom dopočítáme b z poslední rovnice jako $b = 2 - t$. Tím jsme vyřešili poslední rovnici a můžeme se posunout k další rovnici směrem nahoru. b a d už známe. V první rovnici zbývá ještě a a c. Stejnou úvahou dojdeme k tomu, že c zvolíme jako parametr (může nabývat libovolnou hodnotu): $c = s$ pro $s \in \mathbb{R}$. Zbývá dopočítat a, to vyjádříme z první rovnice a dosadíme: $a = 4 - b - c - d = 4 - (2 - t) - s - t = 2 - s$. Soustava má nekonečně mnoho řešení, které zapíšeme:

$$\begin{aligned} a &= 2 - s \\ b &= 2 - t \\ c &= s \\ d &= t, \end{aligned}$$

pro $t, s \in \mathbb{R}$.

Důležité pozorování je, že z každé (nezávislé) rovnice vyjádříme (vypočítáme) právě jednu neznámou. Máme-li soustavu s odstupňovanou maticí a známe tak počet nezávislých rovnic, vidíme, kolik neznámých z daných rovnic určíme. Tím pádem také víme, kolik neznámých budeme moci libovolně volit neboli kolik budeme potřebovat parametrů. Platí důležité pravidlo: **počet rovnic + počet parametrů = počet neznámých**.
V naší soustavě jsme měli dvě rovnice pro čtyři neznámé, dvě rovnice "chybí" a dvě neznáme tím pádem budeme volit. A opravdu jsme použili dva parametry. Nelze ovšem zvolit libovolné dvě neznámé. Je potřeba vycházet z toho, jak rovnice vypadají a řešit soustavu v odstupňovaném tvaru postupně od poslední rovnice. V naší soustavě např. nemůžeme zvolit současně $b = t$ a $d = s$, protože poslední rovnice je $b + d = 2$ a jakmile zvolíme d, neznámá b už je určena.

Vyřešme soustavu:

$$\begin{aligned} a + b + c + d + e &= 1 \\ b + c + d &= 0. \end{aligned}$$

Soustava je v odstupňovaném tvaru (matice soustavy bude v druhém řádku začínat nulou), nebudeme už proto provádět eliminační metodu a můžeme rovnou přikročit k řešení. Máme dvě rovnice pro pět neznámých, očekáváme, že tři neznámé budeme moci libovolně zvolit: budeme potřebovat tři parametry. V poslední rovnici $b + c + d = 0$ můžeme dvě neznámé libovolně zvolit a třetí neznámou pak dopočítáme. To lze provést více způsoby, zvolíme třeba $d = t$ a $c = s$ pro $t, s \in \mathbb{R}$ a dopočítáme $b = -c - d = -s - t$. Tím máme vyřešenou poslední rovnici a posuneme se o jednu rovnici výše. V ní zatím neznáme a a e. Zvolíme $e = r$ ($r \in \mathbb{R}$) a dopočítáme $a = 1 - b - c - d - e = 1 - r$. Celkově jsme dostali řešení:

$$\begin{aligned} a &= 1 - r \\ b &= -s - t \\ c &= s \\ d &= t \\ e &= r \end{aligned}$$

pro $r, s, t, \in \mathbb{R}$.

Vyřešme ještě soustavu zadanou maticí

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & 3 & 5 & 10 \end{array}\right].$$

Nejprve provedeme eliminaci:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & 3 & 5 & 10 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Nyní máme matici v odstupňovaném tvaru, neznámé označíme a, b, c, d, napíšeme si rovnice a soustavu dořešíme:

$$\begin{aligned} a + c + d &= 3 \\ c + 2d &= 3 \\ d &= 1. \end{aligned}$$

Jako obvykle postupujeme odspodu a dostáváme postupně $d = 1$ z poslední rovnice, $c = 1$ z předposlední a $a = 1$ z první rovnice. Nesmíme ještě zapomenout na neznámou b, která se v rovnicích explicitně nevyskytuje. Rovnice na tuto neznámou nekladou žádné požadavky, takže může nabývat libovolných hodnot, zvolíme $b = t$, $t \in \mathbb{R}$. Opravdu, máme čtyři neznámé, tři rovnice a jeden parametr $(3 + 1 = 4)$.

Zbývá odpovědět na otázku, jak při výpočtu poznáme, že daná soustava nemá řešení. Proveďme eliminaci následující soustavy:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right].$$

V posledním kroku jsme nejprve třetí řádek vynásobili -2 a poté sečetli se druhým řádkem. Máme odstupňovaný tvar a dostáváme rovnice:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 3 \\ 2y &= -3 \\ 0 &= -1. \end{aligned}$$

Vidíme, že třetí rovnice nebude splněna nikdy bez ohledu na hodnoty x, y a z, což znamená, že daná soustava nemá řešení. Rovnice typu $0 = c$, kde $c \neq 0$ je poznávacím znamením soustav, které nemají řešení. V maticovém zápisu to znamená, že v soustavě, která nemá řešení, se během eliminace objeví řádek $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & \dots & 0 & c \end{array}\right]$, kde $c \neq 0$. Jakmile během výpočtu narazíme na řádek tohoto typu, víme, že daná soustava nemá řešení (a nemusíme samozřejmě dále v počítání pokračovat).

1.5 Homogenní a nehomogenní soustava

Při řešení soustav lineárních algebraických rovnic často narazíme na rovnice, které všechny mají na pravé straně nuly. Taková soustava se nazývá homogenní. Jakákoliv jiná soustava je pak nehomogenní. Homogenní soustava je třeba:

$$\begin{aligned} x+y+z&=0\\ x-2y+3z&=0\\ 2x+y+z&=0. \end{aligned}$$

Zapíšeme soustavu pomocí matice a provedeme eliminační metodu:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -3 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right].$$

Máme matici v odstupňovaném tvaru, vrátíme se k rovnicím:

$$\begin{aligned} x+y+z&=0\\ -3y-2z&=0\\ 5z&=0. \end{aligned}$$

Postupně odspodu získáváme řešení $z=0$, $y=0$ a $x=0$. Pokud si prohlédneme provedenou eliminaci, vidíme, že na pravé straně (poslední sloupec v matici za čárou) jsou od začátku do konce nuly. Pokud řešíme homogenní soustavy, jsou na začátku nuly vždy a prováděním elementárních úprav (výměna řádků, vynásobení řádku nenulovou konstantou, přičtení násobku řádku k jinému řádku) se to nezmění. To má pro nás dva důsledky.

Prvním je, že homogenní soustava má vždy řešení. V předchozí kapitole jsme ukazovali, že při řešení soustavy, která nemá řešení, narazíme na řádek $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & \dots & 0 & c \end{array}\right]$, kde $c \neq 0$. Při řešení homogenní soustavy ale v posledním sloupci nemůže být nenulové číslo. (Dalším důvodem pro to, že homogenní soustava má vždy řešení je, že každou homogenní soustavu řeší, pokud za všechny neznámé dosadíme nuly. To ale neznamená, že homogenní soustava nemůže mít ještě další, nenulové řešení.)

Dalším důsledkem je následující úprava zápisu: protože se během eliminace homogenní soustavy nuly na pravé straně nemění, ze zápisu je vynecháváme. V maticovém zápisu homogenní soustavy vynecháváme svislou čáru oddělující pravou stranu rovnic a nepíšeme poslední sloupec nul. Maticový zápis a eliminace naší soustavy pak bude vypadat:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1\\ 0 & -3 & 2\\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1\\ 0 & -3 & -2\\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Pokud narazíme na soustavu zadanou maticí, ve které není svislá čára, znamená to, že řešíme homogenní soustavu a na pravé straně jsou nuly. Pozor na to, obvyklá chyba je považovat poslední sloupec i v takové matici za pravé strany rovnic. Pak ale místo homogenní soustavy řešíte soustavu nehomogenní, která má o jednu neznámou méně, a celý výpočet je vzhledem k původnímu zadání zcela nesmyslný.

1.6 Shrnutí

Seznámili jsme se algoritmem pro řešení soustav lineárních algebraických rovnic, který se nazývá Gaussova eliminační metoda. Shrňme si na závěr celkový postup:

1. Pokud je soustava zadaná ve formě rovnic, přepíšeme si jí do maticové podoby.
2. Pomocí elementárních úprav převedeme matici na odstupňovaný tvar. Je nutné matici upravit opravdu na správný tvar, kdy každý následující řádek obsahuje zleva více nul než předchozí řádek.
3. Jedinou výjimkou z bodu 2 je situace, kdy narazíme na řádek $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & \dots & 0 & c \end{array}\right]$, kde $c \neq 0$. V tu chvíli víme, že soustava nemá řešení, a výpočet můžeme ukončit.
4. Z matice v odstupňovaném tvaru přepíšeme soustavu zpátky do podoby rovnic. Ty vyřešíme. Postupujeme vždy zdola nahoru od poslední rovnice (dle pořadí řádků v matici). Z každé rovnice vypočítáme právě jednu neznámou. Pokud je tam neznámých více (takových, na které jsme ještě nenarazili při řešení předchozích rovnic), můžou až na jednu nabývat libovolných hodnot. K popisu tohoto faktu použijeme parametry. Poslední neznámou pak z rovnice vyjádříme.

Základem řešení je stále sčítací metoda. Důležitým přínosem eliminační metody je algoritmus, podle kterého víme co s čím máme sčítat a jakého cíle potřebujeme dosáhnout. Zejména soustavy s jiným počtem řešení než s jedním by se nahodilým sčítáním rovnic řešily jen velmi obtížně. Naopak z odstupňovaného tvaru poznáme vše včetně případného počtu paranetrů, které budeme potřebovat.

1.7 Zpětný chod eliminační metody

V této kapitole se budeme soustředit pouze na soustavy, které mají právě jedno řešení. Zpětný chod se dá sice zavést obecněji, ale pro naše potřeby v kapitole o inverzních maticích si vystačíme jen s nejjednodušší variantou pro soustavy s jedním řešením. Zpětný chod navazuje na přímý chod eliminace. Pokud se zajímamáme pouze o soustavy s právě jedním řešením, musíme mít soustavu, která má stejný počet rovnic a neznámých a v eliminaci nevznikne žádný nulový řádek v levé části matice. Taková eliminace vypadá třeba takto:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ \color{red}{0} & -1 & 1 & 1 \\ \color{red}{0} & \color{red}{0} & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Opravdu se jedná o soustavu s právě jedním řešením, pro takové soustavy je po eliminaci typický trojúhelník nul v levé spodní části (červené 0). Z tohoto tvaru rovnic už jsme se vraceli k rovnicím a víme, že dořešit takovou soustavu je snadné. V některých situacích se přesto může hodit tzv. zpětný chod eliminace. Nevrátíme se zpátky k rovnicím, ale budeme pokračovat v eliminaci z cílem vytvořit podobný trojúhelník nul také vpravo nahoře. Odečtením spodního řádku od prvního a druhého dostaneme nuly v posledním sloupci:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \color{green}{0} & 2 \\ 0 & -1 & \color{green}{0} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Pokračujeme v eliminaci stejným systémem, ale odspoda a od posledního sloupce. Proto se tento postup nazývá zpětný chod. Přičteme druhý řádek k prvnímu a dostaneme:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \color{green}{0} & 2 \\ 0 & -1 & \color{green}{0} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \color{green}{0} & \color{green}{0} & 1 \\ \color{red}{0} & -1 & \color{green}{0} & -1 \\ \color{red}{0} & \color{red}{0} & 1 & 2 \end{array}\right]$$

V tuto chvíli máme trojúhelník nul jak vlevo dole (červený), tak vpravo nahoře (zelený). Poslední úprava spočívá v tom, že každý řádek vynásobíme takovou konstantou, aby mezi oběma nulovými trojúhelníky byly jedničky (tzv. jednotková matice, viz další kapitola o maticích). V našem příkladu stačí vynásobit druhý řádek číslem -1.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Tento tvar (dva trojúhelníky nul a jedničky mezi nimi) je cílem zpětného chodu. Výhoda takového tvaru bude zřejmá, když napíšeme soustavu rovnic reprezentovanou takovou maticí:

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 1 \\ z &= 2. \end{aligned}$$

Zápis rovnic je vlastně stejný jako zápis řešení, s takovou soustavou už nemusíme dál nic dělat. Vrátíme-li se do maticového zápisu, vidíme, že na konci zpětného chodu máme v posledním sloupci přímo řešení soustavy.

(Na další stránce následuje cvičení.)

1.8 Cvičení

Nalezněte všechna řešení soustav zadaných maticí (pro soustavy s jedním řešením proveďte zpětný chod):

1.
$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \end{array}\right]$$

2.
$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 & 0 & 5 \end{array}\right]$$

3.
$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 0 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

4.
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

5.
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Řešení: (Vzhledem k tomu, že proces eliminace není dán jednoznačně, parametrický popis řešení se může lišit. Musí ale popisovat stejnou množinu řešení. Neznámé značím písmeny ze začátku abecedy, takže po řadě $a, b, c...$)

1. $a = 2$, $b = 0$, $c = -2$

2. nemá řešení

3. $a = 5t + 6s - 2$, $b = 1 - 2t - 3s$, $c = t$, $d = s$, kde $s, t \in \mathbb{R}$

4. $a = 0$, $b = -t - s$, $c = t$, $d = s$, kde $s, t \in \mathbb{R}$

5. $a = -r + 2s - 2t$, $b = r$, $c = 2s$, $d = s$, $e = t$, kde $r, s, t \in \mathbb{R}$