1 Matice

V kapitole o řešení soustav eliminační metodou jsme poznali objekty, které se nazývají matice. Použití matic v matematice se neomezuje zdaleka jenom na řešení soustav, mají mnohé další využití. Seznámíme se proto s jejich základními vlastnosmi.

Maticí typu $r \times s$ nazýváme obdélníkové schéma (tabulku) reálných čísel, které má r řádků a s sloupců. Matice typu $n \times n$ se nazývá čtvercová (má stejný počet řádků a sloupců). Matice značíme velkými písmeny (v sázeném textu tučně) a zapisujeme do hranatých závorek (někdy se používají také kulaté závorky):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,s} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r,1} & a_{r,2} & \cdots & a_{r,s} \end{bmatrix}$$

Prvky matice značíme malými písmeny (stejnými jako je název matice) vždy se dvěma dolními indexy. První index říká, ve kterém řádku matice se prvek nachází, a druhý index stejným způsobem označuje sloupec. $a_{1,2}$ je tedy prvek matice $\mathbf{A}$, který se nachází v prvním řádku a ve druhém sloupečku. $a_{i,j}$ je prvek matice $\mathbf{A}$, který se nachází v i-tém řádku a v j-tém sloupečku. Máme-li konkrétně

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 17 \end{bmatrix},$$

jedná se o matici typu 3×4, protože má 3 řádky a 4 sloupce. Prvek v prvním řádku a ve čtvrtém sloupci je $b_{1,4} = 6$. Prvek ve třetím řádku a ve druhém sloupci je $b_{3,2} = 3$.

1.1 Jednoduché operace s maticemi

Kromě eliminační metody, se kterou jsme se seznámili v kapitole o soustavách, můžeme s maticemi provádět i jednoduché aritmetické operace.

Nejprve musíme uvést, co znamená, že matice se rovnají. $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ znamená, že matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ jsou stejné. Podrobněji: obě jsou stejného typu (mají stejný počet řádků a sloupců) a všechny prvky na odpovídajících si pozicích se rovnají. Rovnost matic vlastně převádíme na rovnost všech jejích prvků: říkáme po prvcích. Za chvíli uvidíme, že také sčítání a odčítání matic probíhá po prvcích. Jestliže např.

$$\begin{bmatrix} x & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},$$

musí nutně platit $x = 7$, protože všechny prvky na odpovídajících si pozicích se musí rovnat. Podmínka, že matice jsou stejného typu, je samozřejmě splněna.

Pozor, je nutné rozlišovat právě definovanou rovnost matic a relaci ekvivalence $\sim$, se kterou jsme pracovali u soustav. $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$ znamená, že matice $\mathbf{B}$ vznikla z $\mathbf{A}$ konečným počtem elementárních úprav (eliminační metodou). Platí např.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix},$$

tyto matice se ale nerovnají (u prvních dvou matic se prvky v druhých řádcích nerovnají, třetí matice je dokonce jiného typu–má jiné rozměry):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sčítání a odčítání matic definujeme pro matice stejného typu po prvcích: jestliže $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$, platí $c_{1,1} = a_{1,1} + b_{1,1}$ a tak dále pro všechny prvky. A analogicky pro odčítání. Máme tedy např.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -7 \end{bmatrix},$$

nebo

$$\begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -8 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ -2 & 9 & 4 \end{bmatrix}.$$

Součet

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -8 & 5 \end{bmatrix}$$

není definován.

Podobným způsobem, tedy po prvcích, je definováno také násobení matice číslem (někdy se říká násobení matice skalárem). Násobíme-li matici číslem, násobíme tímto číslem každý její prvek:

$$5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 10 & -25 \end{bmatrix}.$$

V kapitole o inverzní matici se bude hodit obrácený proces, vytknutí čísla z matice:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{-5}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}.$$

1.2 Násobení matic

V předchozí kapitole jsme zavedli rovnost, sčítání a odčítání matic, přičemž vše se jednoduše přenášelo na prvky. Ukazuje se, že definovat takto násobení matic by nebylo vhodné. (Definovat násobení můžeme jak chceme, jde o to, aby námi zavedená operace byla užitečná.) V dalších aplikacích se ukazuje jako účelné definovat násobení poněkud jiným způsobem. Vyjímečně uvedeme formální definici:

Definice 1 *Buďte $\boldsymbol{A}$ matice typu $m \times n$ a $\boldsymbol{B}$ matice typu $n \times p$. Součin matic $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ definujeme jako matici $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ typu $m \times p$, pro jejíž prvky platí pro $i = 1 \dots m$ a $k = 1 \dots p$:*

$$c_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{j,k}.$$

Z této definice plynou následující vlastnosti násobení matic:

1. Všimněte si, že matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ nemusí být stejného typu. Důležitý je ale společný rozměr n udávající, kolik sloupců má matice $\mathbf{A}$ a současně kolik řádků má matice $\mathbf{B}$. Pokud matice nemají tento rozměr stejný, nejdou násobit!

2. S předchozím pozorováním souvisí fakt, že definice není symetrická pro $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$. Záleží tedy na pořadí, ve kterém násobíme. Může se stát, že $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ je definováno ($\mathbf{A}$ má stejný počet sloupců jako $\mathbf{B}$ řádků), ale $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ definováno není ($\mathbf{B}$ nemá stejný počet sloupců jako $\mathbf{A}$ řádků). Může se ovšem také stát, že oba součiny jsou definovány, ale $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$. Navíc existují i matice, pro které $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$. Vlastnost $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ se nazývá komutativnost násobení a násobení matic tedy obecně není komutativní. Na to je třeba při počítání dávat velký pozor! Sice existují i matice, jejichž součin komutativní je, to ale zpravidla neumíme dopředu poznat a rozhodně neuděláme chybu, když budeme při počítání s maticemi důsledně dodržovat pořadí součinu. Poznamenejme na závěr, že není důležité, která matice se jmenuje $\mathbf{A}$ a která $\mathbf{B}$, ale která je první v pořadí a která druhá.

3. Zbývá ukázat, jaký je tedy postup při výpočtu součinu matic. Vezměme si matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -5 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Spočítejme dle definice součin $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$. Ten je definován, protože matice $\mathbf{A}$ (první v našem součinu) má tři sloupečky a matice $\mathbf{B}$ má tři řádky. Součin v opačném pořadí $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ definován není, protože tentokrát je první v pořadí matice $\mathbf{B}$, která má tři sloupečky, ale druhá v pořadí, matice $\mathbf{A}$ má jen dva řádky. Označme počítaný součin jako matici $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$. Tato matice bude mít stejný počet řádků jako $\mathbf{A}$ a stejný počet sloupců jako $\mathbf{B}$, půjde tedy o matici typu 2×3. Ta má celkem šest prvků, spočítat musíme každý zvlášť. Začneme prvkem na pozici $1, 1$ (v prvním řádku a v prvním sloupci). Do definičního vztahu dosadíme $i = 1$ a $k = 1$ a dostaneme:

$$c_{1,1} = \sum_{j=1}^{3} a_{1,j} b_{j,1} = a_{1,1} b_{1,1} + a_{1,2} b_{2,1} + a_{1,3} b_{3,1}.$$

Pro rozepsání sumy dosazujeme za j postupně $1, 2, 3$ a sčítáme. Prvky matic $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ známe, dosadíme konkrétní hodnoty a pokračujeme:

$$c_{1,1} = \sum_{j=1}^{3} a_{1,j} b_{j,1} = a_{1,1} b_{1,1} + a_{1,2} b_{2,1} + a_{1,3} b_{3,1} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 = 1 + 0 + 6 = 7.$$

Znázorněme provedený výpočet v maticích:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} = \mathbf{C}.$$

Znázorněme ještě výpočet pro prvek matice $\mathbf{C}$ ve druhém řádku a ve třetím sloupci. Dosadíme $i = 2$ a $k = 3$ a dostaneme:

$$c_{2,3} = \sum_{j=1}^{3} a_{2,j} b_{j,3} = a_{2,1} b_{1,3} + a_{2,2} b_{2,3} + a_{2,3} b_{3,3} = 2 \cdot 3 + (-5) \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 6 + (-15) + 3 = -6.$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -6 \end{bmatrix} = \mathbf{C}.$$

Vidíme, že při výpočtu procházíme v první matici řádek (ten, ve kterém leží počítaný prvek) a ve druhé matici procházíme sloupec (ten, ve kterém leží počítaný prvek). Násobíme postupně první prvek v řádku (1. matice) s prvním prvkem sloupce (2. matice), druhý prvek s druhým prvkem atd. a jednotlivé výsledky sčítáme. Heslo pro zapamatování si výpočtu součinu matic je "řádek krát sloupec". Nyní už nemusíme rozepisovat sumu z definice a můžeme rovnou počítat:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 & \cdot \\ \cdot & \cdot & -6 \end{bmatrix} = \mathbf{C},$$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 5 \\ . & . & -6 \end{bmatrix} = \mathbf{C}.$$

Tímto způsobem postupně doplníme celou matici:

$$\underset{2\times 3}{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -5 & 3 \end{bmatrix}} \cdot \underset{3\times 3}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}} = \underset{2\times 3}{\begin{bmatrix} 7 & 5 & 5 \\ 21 & 3 & -6 \end{bmatrix}} = \mathbf{C}.$$

Znázorněme si ještě typy jednotlivých matic. Počet sloupců 1. matice ($\mathbf{A}$) musí být stejný, jako počet řádků 2. matice ($\mathbf{B}$), jinak by součin nebyl definován. V našem případě jsou oba tyto rozměry 3. Počet řádků 1. matice ($\mathbf{A}$) 2 a počet sloupců 2. matice ($\mathbf{B}$) 3 určuje rozměr výsledné matice $\mathbf{C}$.

4. Z definice násobení se dají odvodit další vlastnosti této operace. Formálně to provádět nebudeme, pouze si shrneme výsledky. Na úrovni, ve které se zde budeme pohybovat, je jediný podstatný rozdíl mezi sčítáním a násobením matic a sčítáním a násobením (reálných) čísel to, že násobení matic není komutativní (při podrobnějším studiu bychom nějaké další rozdíly našli). Ostatní vlastnosti, na které jsme zvyklí z číselné aritmetiky, platí i pro násobení matic. Zde jsou ty nejběžnější vlastnosti:

   - $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\cdot\mathbf{C} = \mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$, tzv. asociativnost
   - $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot\mathbf{C} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}$, tzv. pravá distributivnost
   - $\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{C}\cdot\mathbf{A}+\mathbf{C}\cdot\mathbf{B}$, tzv. levá distributivnost

   Rovnosti platí pro libovolné matice takové, že všechny součiny mají smysl. Distibutivnost je roznásobování závorky resp. obráceně vytýkání. Uvádíme zvlášť levou a pravou distributivnost proto, že násobení není komutativní a musíme rozlišovat, zda se násobí zleva nebo zprava. Uvědomte si také, že z výrazu $\mathbf{C}\cdot\mathbf{A}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}$ se nedá vytknout matice $\mathbf{C}$, protože v prvním součinu se touto maticí násobí zleva a v druhém součinu zprava.

1.3 Cvičení

Rozhodněte, zda jsou definovány $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ nebo $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$. Součiny, které mají smysl, spočítejte! Všímejte si také komutativity součinu, tj. zda platí $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$.

1. $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

2. $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

3. $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

4.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 12 \\ 2 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Řešení:

1. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ není definováno. $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 20 \\ 3 & -5 & 14 \\ 8 & -10 & 17 \\ -2 & 0 & -10 \end{bmatrix}$. Součin $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ není komutativní, protože $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ neexistuje.
2. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = [11]$. $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -15 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -9 & 6 \end{bmatrix}$. Součin $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ není komutativní, protože $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ je matice jiného typu než $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.
3. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$. Ačkoliv jsou oba výsledky matice stejného typu, je $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.
4. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 12 \\ 2 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$. Součin je komutativní a všimněte si také $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$. Je to proto, že $\mathbf{B}$ je tzv. jednotková matice (viz dále).

1.4 Inverzní matice

Matice zatím umíme sčítat, odčítat a násobit. Při porovnání s aritmetikou reálných čísel jsme uváděli, že na této základní úrovni mají maticové operace podobné vlastnosti jako operace mezi čísly – až na komutativnost násobení. V reálných číslech existují ve vztahu k operacím speciální prvky: čísla 0 a 1. Číslo 0 je tzv. neutrální prvek pro sčítání: pro libovolné reálné a platí $a+0 = a$. Při sečtení s nulou se číslo nemění. Analogicky je 1 neutrální prvek pro násobení: pro libovolné reálné a platí $a \cdot 1 = a$. Nalezneme neutrální prvky i pro maticové operace?

Najít neutrální prvek pro sčítání je snadné, je to tzv. nulová matice, jejíž všechny prvky jsou nuly. Nulová matice může být libovolného typu,

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

je nulová matice typu 3×4.

U násobení je situace malinko komplikovanější, snadno ověříme, že matice, která má na všech pozicích jedničky, jako neutrální prvek pro násobení nefunguje. Z definice násobení se dá dokázat, že roli neutrálního prvku pro násobení hraje tzv. jednotková matice, což je čtvercová matice, jejíž prvky jsou jedničky a nuly, její prvky se někdy značí $\delta_{i,j}$ a platí:

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Jedničky jsou tedy na pozicích, kde je řádkový i sloupcový index stejný, tyto prvky se nazývají hlavní diagonála. Mimo tuto hlavní diagonálu jsou nuly. Jednotkovou matici budeme značit $\mathbf{E}$

nebo $\mathbf{E}_n$, budeme-li chtít zdůraznit, že se jedná o matici typu $n \times n$. Máme tak např. jednotkovou matici 3×3, kterou označíme $\mathbf{E}_3$ nebo jen zkráceně $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pro libovolné matice platí $\mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{A}$ a $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B}$, je-li $\mathbf{E}$ jednotková matice a mají-li součiny smysl. Je-li $\mathbf{C}$ čtvercová matice stejného typu jako $\mathbf{E}$, platí dokonce $\mathbf{C} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{C}$.

Zabýváme se základními operacemi s maticemi, ale nemluvili jsme o dělení matic. Je to proto, že dělení matic neexistuje. Ukážeme si, že v některých situacích se dá absence dělení "obejít". Dělení je totiž potřeba docela často. Představme si reálná čísla a rovnici $2x = 6$. Pro vyřešení této rovnice stačí obě její strany vydělit dvěma a dostaneme řešení $x = 3$. Dá se taková rovnice vyřešit bez dělení? Změna je malá, ale formálně dělení nepoužijeme: obě strany vynásobíme číslem $2^{-1} = \frac{1}{2}$ a dostaneme $\frac{1}{2}2x = \frac{1}{2}6$, z čehož už řešení plyne. Princip spočívá v tom, že obě strany vynásobíme takovým číslem, aby koeficient u x vyšel po provedení této úpravy 1 ($2 \cdot 2^{-1} = 1$). Pro reálná čísla taková hodnota vždy existuje s jednou vyjímkou – tou je číslo 0. Je proto přirozené se ptát, zda ke každé matici bude existovat další matice taková, že při součinu těchto matic vyjde jednotková matice (maticová jednička). Při řešení této otázky se omezíme na čtvercové matice a ukážeme, si že pro některé matice má taková úloha řešení. Pro tyto matice pak bude možné nahradit dělení násobením maticovou analogií k převrácené hodnotě čísel. Pro jednoduchou ilustraci si představme následující maticovou rovnici: buďte zadány matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

a neznámá matice

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,1} & x_{2,2} \end{bmatrix}.$$

Nyní chceme vyřešit maticovou rovnici

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}.$$

Jedna možnost je dosadit konkrétní matice, vynásobit $\mathbf{A}$ a $\mathbf{X}$ a porovnáním prvků na jednotlivých pozicích dostaneme soustavu lineárních rovnic pro čtyři neznámé prvky matice $\mathbf{X}$. Tento postup si předvedeme za chvíli na podobné úloze. Naším hlavním cílem však je zkoumat možnosti, jak se vypořádat s absencí operace dělení u matic. Kdyby totiž nešlo o matice ale o čísla, stačilo by k řešení dané rovnice vydělit $\mathbf{A}$. Jak jsme již zmiňovali výše, cesta povede přes analogii převrácené hodnoty. Kdyby se nám povedlo najít takovou matici – označme ji jako analogii převrácené hodnoty $\mathbf{A}^{-1}$, pro kterou by platilo $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$ ($\mathbf{E}$ označuje jednotkovou matici), dalo by se k řešení rovnice místo neexistujícího dělení $\mathbf{A}$ použít násobení $\mathbf{A}^{-1}$. (Tak jako jsme úplně na začátku místo dělení 2 násobili $2^{-1} = \frac{1}{2}$.) Dostáváme tak podobnou úlohu

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{E},$$

kterou vyřešíme výše zmiňovaným způsobem přes soustavu pro prvky. Neznámá matice

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

přitom značí hledanou matici označenou v předchozím textu jako $\mathbf{A}^{-1}$. Dosadíme za matice a dostaneme

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Po vynásobení ("řádek $\times$ sloupec") máme

$$\begin{bmatrix} 3a+c & 3b+d \\ 5a+2c & 5b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matice se rovnají, pokud jsou stejného typu a pokud se rovnají prvky na odpovídajících si pozicích. Porovnáních jednotlivých prvků dostáváme soustavu:

$$\begin{aligned} 3a+c &= 1 \\ 3b+d &= 0 \\ 5a+2c &= 0 \\ 5b+d &= 1. \end{aligned}$$

Na první pohled se jedná o soustavu čtyř rovnic pro čtyři neznámé. To je logické, hledáme matici typu 2×2, která má čtyři prvky. Takový postup ovšem nevypadá pro praktické použití příliš slibně, pro stále ještě malou matici 3×3 bychom dostali devět rovnic pro devět neznámých. Na druhý pohled si ale všimneme, že proměnné a, c a b, d se v rovnicích vyskytují odděleně a jedná se tak vlastně o dvě soustavy vždy pro dvě neznámé. (Rozmyslete si, proč jsou výhodnější dvě soustavy pro dvě neznámé než jedna velká pro čtyři neznámé. Pro matici 3×3 jsou to tři soustavy po třech neznámých versus jedna velká soustava pro devět neznámých). Napišme si obě soustavy:

$$\begin{aligned} 3a+c &= 1 \\ 5a+2c &= 0 \end{aligned}, \qquad \begin{aligned} 3b+d &= 0 \\ 5b+d &= 1 \end{aligned}.$$

I když se jedná o malé soustavy, vyřešíme je eliminační metodou. Naším hlavním cílem je totiž na tomto příkladu ilustrovat obecný algoritmus pro řešení tohoto problému. Přepišme si tedy obě soustavy do maticové podoby:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{array}\right], \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{array}\right].$$

A obě soustavy vyřešme (použijeme i zpětný chod):

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|r} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|r} 3 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|r} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|r} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|r} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right],$$

Přechodem zpátky k rovnicím dostáváme rovnou řešení:

$$\begin{aligned} a &= 2 \\ c &= -5 \end{aligned}, \qquad \begin{aligned} b &= 1 \\ d &= 3 \end{aligned}$$

a hledaná matice je

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Podíváme-li se teď pozorně na řešení obou soustav (červené a modré). Všimneme si, že obě soustavy se liší pouze na pravých stranách, levé strany s neznámými jsou stejné – obě matice (červená a modrá) jsou před svislou čárou oddělující pravou stranu (tzv. matice soustavy) stejné. A jsou stejné i jako původní matice $\mathbf{A}$. To že jsou stejné části rovnic s neznámými v obou soustavách znamená, že také obě eliminace jsou stejné: používáme stejné elementární úpravy a levé části matic (matice soustavy) jsou v obou případech stejné. (Porovnejte si červenou a modrou eliminaci.) Protože neradi píšeme dvakrát stejné věci a chceme si postup co nejvíce ulehčit, zavedeme následující zápis umožňující vyřešit obě soustavy najednou. Za čáru oddělující v maticové reprezentaci pravou stanu napíšeme nejprve pravou stanu první soustavy (pro a, c, červená) a potom pravou druhé soustavy (pro b, d, modrá). Tento zápis představuje řešení obou soustav naráz, Můžeme to takto udělat proto, že levá část (matice soustavy) je v obou případech stejná. Dostáváme:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \end{array}\right].$$

Pro přehlednost kopíruji z předchozí stránky řešení obou původních soustav. Zakryjete-li v horní eliminaci poslední modrý sloupec, dostanete řešení první soustavy – červené řešení dole. Zakryjete-li v horní eliminaci předposlední červený sloupec, dostanete řešení druhé soustavy – modré řešení dole.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Porovnáme-li zadání úlohy a její řešení s eliminací

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \end{array}\right].$$

vidíme, že na začátku máme v levé části původní matici $\mathbf{A}$ a v pravé části jednotkovou matici. Na konci máme jednotkovou matici vlevo, v pravé části je přímo hledaná matice $\mathbf{A}^{-1}$. Takto to bude fungovat vždy, nezávisle na konkrétním zadání (čtvercové) matice $\mathbf{A}$ a jejím typu (rozměru). Tento algoritmus se nazývá Gaussova-Jordanova eliminace. Uveďme teď formální definici a shrnutí výše předvedeného algoritmu.

Definice 2 *Pro čtvercovou matici $\boldsymbol{A}$ typu $n \times n$ definujeme inverzní matici jako čtvercovou matici $\boldsymbol{A}^{-1}$ stejného typu, pro kterou platí $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$, kde $\boldsymbol{E}$ je čtvercová matice opět stejného typu $n \times n$. Pokud k matici $\boldsymbol{A}$ existuje inverzní matice, nazýváme $\boldsymbol{A}$ regulární maticí. V opačném případě říkáme, že $\boldsymbol{A}$ je singulární.*

Inverzní matici hledáme pomocí Gaussovy-Jordanovy eliminace. Pokud hledáme inverzní matici k $\mathbf{A}$ typu $n \times n$, začneme tak, že do jedné matice napíšeme vlevo matici $\mathbf{A}$ a za svislou oddělovací čáru pak jednotkovou matici stejného typu $\mathbf{E}$. Na celou matici typu $n \times 2n$ použijeme nejprve přímý a poté zpětný chod eliminace. Pokud v levé části při eliminaci nevznikne v průběhu eliminace nulový řádek, dostaneme na konci jednotkovou matici v levé části a vpravo bude hledaná inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$. Schématicky: $[\mathbf{A}|\mathbf{E}] \sim [\mathbf{E}|\mathbf{A}^{-1}]$. Mějme přitom na paměti, že tento zápis vlastně reprezentuje souběžné řešení n soustav pro dohromady n^2 neznámých prvků hledané inverzní matice.

Příklad: nazněte inverzní matici k

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Inverzní matici hledáme pomocí Gaussovy-Jordanovy eliminace. Napíšeme vedle sebe matici $\mathbf{A}$ a jednotkovou matici:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

a provedeme nejprve přímý chod eliminační metody (počítejte i sami, abyste viděli, které úpravy provádíme):

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \color{red}{0} & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ \color{red}{0} & \color{red}{0} & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

V tuto chvíli vidíme, že úloha má řešení (více o tom ještě dále) a pokračujeme zpětným chodem:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right],$$

kde v posledním kroku jsme druhý a třetí řádek vynásobili $\frac{1}{2}$, aby vlevo byla opravdu jednotková matice. Výsledek je

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Protože je ruční výpočet velice náchylný na početní chyby, provádíme na konci zkoušku. Ověříme, že $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zbývá se podrobněji zabývat otázkou existence a neexistence inverzní matice. Začněme příkladem a hledejme inverzní matici k matici

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

V Gaussově-Jordanově eliminaci

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \color{red}{0} & \color{red}{0} & -3 & 1 \end{array}\right]$$

narazíme (v tomto jednoduchém příkladu velice rychle) na nulový řádek v levé části. Z tohoto tvaru ovšem nemůžeme pokračovat zpětným chodem k jednotkové matici. Vzpomene-li si, že tento zápis vlastně reprezentuje dvě soustavy, vidíme, že ani jedna z nich nemá řešení. Inverzní matice tedy neexistuje – $\mathbf{B}$ je singulární matice.

Zapamatujte si, že pokud během Gaussovy-Jordanovy eliminace vznikne nulový řádek v levé části, znamená to, že inverzní matice neexistuje (a původní matice je singulární). Naopak pokud nulový řádek nevznikne, inverzní matice existuje (a původní matice je regulární). V situaci, kdy žádný nulový řádek nevznikne, mají všechny soustavy právě jedno řešení. Výsledkem je tedy vždy jen jedna matice. To je v pořádku, dá se dokázat, že k regulární matici existuje inverzní matice právě jedna – ta, kterou nalezneme Gaussovou-Jordanovou eliminací.

Vraťme se nyní k úloze ze začátku této kapitoly, k rovnici $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

a neznámá matice

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,1} & x_{2,2} \end{bmatrix}.$$

Inverzní matici k matici $\mathbf{A}$ jsme už také spočítali:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Rovnici vynásobíme zleva inverzní maticí $\mathbf{A}^{-1}$ a dostaneme

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}.$$

Součin matice s inverzní maticí je dle definice jednotková matice ($\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$), takže dostaneme:

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B},$$

kde $\mathbf{E}$ je jednotková matice patřičného typu (t. $\mathbf{E} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{X}$), takže dostáváme řešení

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Pří úpravách (nejen) této rovnice je nutné pamatovat na to, že násobení matic nemusí být komutativní. Pokud tedy obě strany rovnice něčím násobíme, musíme buď násobit obě strany zleva nebo obě strany zprava. My jsme násobili obě rovnice zleva. Kdybychom obě strany rovnice vynásobili inverzní maticí zprava, dostali bychom

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1},$$

což je sice platná úprava, ale nijak nám nemůže s řešením rovnice, protože nemůžeme využít $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$. A pokud bychom vynásobili jednu stranu zleva a jednu stranu zprava, bylo by to **špatně**, např.:

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1}!$$

Kromě pořadí násobení musíme také vždy, když chceme pracovat s inverzní maticí, kontrolovat regularitu matice. Varováním může být následující řešení: Pro matici

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

nalezněme řešení rovnice

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{C}.$$

Obě strany rovnice vynásobíme inverzní maticí zleva:

$$\mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{C}$$

a dostáváme řešení

$$\mathbf{X} = \mathbf{E}.$$

Řešením je jednotková matice, což se vzhledem k tvaru rovnice dalo čekat. Až potud se zdá vše v pořádku. Dosadíme-li ovšem do rovnice

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}:$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},$$

vidíme, že i tato matice $\mathbf{X}$ řeší danou rovnici. Jak ale může existovat další řešení, které jsme naším původním postupem nenašli? Chyba spočívá v tom, že při řešení jsme používali inverzní matici $\mathbf{C}^{-1}$. Matice $\mathbf{C}$ je ale singulární, takže $\mathbf{C}^{-1}$ vůbec neexistuje. Původní postup řešení proto nedává smysl. Protože matice $\mathbf{C}$ je singulární, nedá se matice $\mathbf{X}$ z rovnice maticovými úpravami vyjádřit a je třeba tento problém řešit přechodem k jejím prvkům. Označíme-li

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

můžeme původní rovnici psát ve tvaru

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},$$

a po vynásobení na levé straně

$$\begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 2a+2c & 2b+2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Porovnáním jednotlivých pozic pak dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} a + c &= 1 \\ b + d &= 1 \\ 2a + 2c &= 2 \\ 2b + 2d &= 2, \end{aligned}$$

která má evidentně nekonečně mnoho řešení (třetí a čtvrtá rovnice jsou dvojnásobky první a druhé). Matic $\mathbf{X}$ řešících původní maticovou rovnici existuje tedy dokonce nekonečně mnoho (dořešte soustavu a najděte je).

1.5 Cvičení:

K zadaným maticím nalezněte inverzní matice (a proveďte zkoušku):

1.
$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

2.
$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

3.
$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Pro matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

vypočítejte neznámé matice $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ a $\mathbf{Z}$, všechny typu 2×2:

4.
$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

5.
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{Y} - \mathbf{Y} = \mathbf{B}$$

6.
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{Z} + \mathbf{Z} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

Řešení:

1.
$$\mathbf{K}^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

2. $\mathbf{L}$ je singulární

3.
$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vyzkoušejte WolframAlpha a

```
inverse{{1,1,0,1},{0,1,1,0},{0,0,1,1},{1,1,0,2}}
```

4. $\mathbf{X} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$

5. Pro vyjádření matice $\mathbf{Y}$ potřebujeme vytknout. Zapíšeme $\mathbf{Y} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{Y}$, kde $\mathbf{E}$ je jednotková matice. Na levé straně pak upravujeme $\mathbf{A} \cdot \mathbf{Y} - \mathbf{Y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Y} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{Y} = (\mathbf{A} - \mathbf{E}) \cdot \mathbf{Y}$, odkud už snadno vyřešíme rovnici

$$\mathbf{Y} = (\mathbf{A} - \mathbf{E})^{-1} \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

6. Matice $\mathbf{Z}$ nejde vyjádřit, musíme vyřešit soustavu pro prvky. Dostaneme $\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.