Integrování

Neurčitý integrál ≈ "obrácená derivace"

$$(x^2)' = 2x$$

derivace : $x^2 \longrightarrow 2x$

n. integrace : $2x \longrightarrow x^2$

Co máme derivovat, aby vyšlo $2x$?

Co máme derivovat, aby vyšlo $\sin x$?

odpověď: $-\cos x$

Co máme derivovat, aby vyšlo $3x^2 - 2$?

odpověď: $x^3 - 2x$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$(x \cdot \sin x)' = \sin x + x \cos x$$

derivace : $x \cdot \sin x \longrightarrow \sin x + x \cos x$

n. integrál : $\sin x + x \cos x \longrightarrow x \sin x$

$x \cdot \sin x \longrightarrow$? Co mám derivovat, aby $x \cdot \sin x$ byl výsledek?

Primitivní funkce $F(x)$ k funkci $f(x)$ jestliže $F'(x) = f(x)$.

Primitivní funkce k $f(x) = 2x$ je $F_1(x) = x^2$

$F_2(x) = x^2 + 1$

...

Primitivní funkce k $g(x) = \sin x$ je $G(x) = -\cos x$

Neurčitý integrál: Zápis $\int f(x)\,dx = F(x) + c$ znamená,

že $F(x) + c$ pro libovolnou hodnotu c je primitivní funkce

k $f(x)$. Neboli $(F(x) + c)' = f(x)$.

$$\int 2x\,dx = x^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c, \quad c \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

$$\int \alpha \cdot f(x)\,dx = \alpha \cdot \int f(x)\,dx$$

$$\int f(x) \cdot g(x) \cdot dx = ?$$

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad (n \neq -1) \qquad \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = \frac{1}{\cancel{n+1}}\cancel{(n+1)} \cdot x^n = x^n$$

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c \qquad \int 2x\,dx = 2\int x\,dx = \cancel{2} \cdot \frac{x^2}{\cancel{2}} + c = \underline{x^2 + c}$$

$$\int (3x^2 - 2)\,dx = \int 3x^2\,dx - \int 2\,dx = 3\int x^2\,dx - 2 \cdot \int 1\,dx =$$

$$= \cancel{3}\,\frac{x^3}{\cancel{3}} - 2x + c = \underline{x^3 - 2x + c}$$

$$\int \sqrt[4]{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{4}}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{4}+1}}{\frac{1}{4}+1} + c = \frac{x^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} + c = \frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5} + c$$

$c \in \mathbb{R},\ x \in (0, +\infty)$

$$\int x\sqrt{x}\,dx = \cancel{\int x\,dx \cdot \int \sqrt{x}\,dx}$$

$$= \int x \cdot x^{\frac{1}{2}}\,dx = \int x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + c = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + c =$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + c, \quad c \in \mathbb{R},\ x \in (0, +\infty)$$

$$\int \frac{1+x^4}{x^2}\,dx = \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{x^4}{x^2}\right)dx = \int x^{-2}\,dx + \int x^2\,dx = \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{x^3}{3} + c =$$

$$= -\frac{1}{x} + \frac{x^3}{3} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$