$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$2 \times 3 \qquad 3 \times 2 \qquad 2 \times 2$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 9 \end{bmatrix} = C$$

$3 \times 2 \qquad 2 \times 3 \qquad 3 \times 3$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 13 \\ 1 & -1 & 11 \end{bmatrix} = D$$

$C = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$ chceme C^{-1} (inverzní matici)

$$\begin{matrix} & C & & E \\ \left[\begin{matrix} 3 \\ 5 \end{matrix}\right. & \left[\begin{matrix} 5 & -1 \\ -3 & 9 \end{matrix}\right. & \left|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right] & \end{matrix} \sim \left[\begin{matrix} 5 & -1 \\ 0 & 42 \end{matrix}\right| \left.\begin{matrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{matrix}\right] \begin{matrix} \\ 42\leftarrow \end{matrix} \sim \left[\begin{matrix} 210 & 0 \\ 0 & 42 \end{matrix}\right| \left.\begin{matrix} 45 & 5 \\ 3 & 5 \end{matrix}\right] \begin{matrix} \cdot\frac{1}{210} \sim \\ \cdot\frac{1}{42} \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right| \left.\begin{matrix} \frac{45}{210} & \frac{5}{210} \\ \frac{3}{42} & \frac{5}{42} \end{matrix}\right] \qquad C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{45}{210} & \frac{5}{210} \\ \frac{3}{42} & \frac{5}{42} \end{bmatrix}$$

$E \qquad C^{-1}$

C je regulární

zk. $C^{-1} \cdot C = \begin{bmatrix} \frac{45}{210} & \frac{5}{210} \\ \frac{3}{42} & \frac{5}{42} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ✓

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 13 \\ 1 & -1 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 13 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 11 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-5) \\ \cdot(-2) \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 21 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -21 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 21 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 2 & -2 \end{bmatrix} \quad D^{-1}$$

NEJDE POKRAČOVAT → D^{-1} neexistuje, D je singulární matice

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \textcircled{1} & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ \textcircled{-1} & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ (+1) \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \textcircled{3} & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ (-3) \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim 5 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & \boxed{1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \boxed{2} & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 4 & -3 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ 2 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & \textcircled{5} & 0 & 9 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 4 & -3 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ (-1) \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & 6 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 4 & -3 & 1 \end{array}\right] \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{(-1)}{5}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{6}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right]$$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 6 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Zu. $C \cdot C^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -4 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ✓

Máme $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

1) $A \cdot X = B \;/\cdot A^{-1}$ zleva

$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$

$A^{-1} \cdot A = E$

$E \cdot X = A^{-1} \cdot B$

$X = A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

spatně: $A \cdot X = B \;/\cdot A^{-1}$ zprava

$A \cdot X \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}$

což nám nepomůže

$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \leftarrow (-4) \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \cdot \frac{1}{2} \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

zk: $A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2) $X \cdot B = C \quad / B^{-1}$ zprava

$$X \cdot \underbrace{B \cdot B^{-1}}_{E} = C \cdot B^{-1}$$

$$X = C \cdot B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \textcircled{1} & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ (-1) \leftarrow \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \textcircled{1} & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ (-2) \leftarrow \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{cc|cc} -2 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} \cdot(-\frac{1}{2}) \\ \cdot(+\frac{1}{2}) \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

3) $C \cdot X = A$ (nelze použít C^{-1}, protože C je singulární!)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 3a+3c & 3b+3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$a + c = 0$ $\qquad$ $b + d = 1$

$3a + 3c = 2$ $\qquad$ $3b + 3d = 4$

$3(a+c) = 2$

Nemá řešení

4) $X \cdot B + X \cdot C = C$

$X \cdot (B+C) = C \quad / (B+C)^{-1}$ zprava (ověřili $B+C$ je regulární)

$X = C \cdot (B+C)^{-1}$

5) $A \cdot X - X \cdot C = B \quad / \cdot A^{-1}$ ~~zleva~~

~~$A^{-1} \cdot A \cdot X - A^{-1} \cdot XC = A^{-1} \cdot B$~~

(nelze vytknout)

je nutno dosadit $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ a řešit rovnice pro prvky – viz 3)