Hledáme vl. čísla a vl. vektory:

$$F = \begin{bmatrix} 7 & -1 & -5 \\ -4 & 4 & 5 \\ 4 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

char. rovnice $\det(F - \lambda E) = 0$

$$\det \begin{bmatrix} 7-\lambda & -1 & -5 \\ -4 & 4-\lambda & 5 \\ 4 & -1 & -2-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{matrix} 7-\lambda & -1 & -5 \\ -4 & 4-\lambda & 5 \end{matrix}$$

$$(7-\lambda)(4-\lambda)(-2-\lambda) - 20 - 20 - [-20(4-\lambda) - 5(7-\lambda) + 4(-2-\lambda)] = 0$$

$$(7-\lambda)(4-\lambda)(-2-\lambda) - 40 - (-80 + 20\lambda - 35 + 5\lambda - 8 - 4\lambda) = 0$$

$$(7-\lambda)(4-\lambda)(-2-\lambda) + 83 - 21\lambda = 0$$

$$(7-\lambda)(4-\lambda)(-2-\lambda)+83-21\lambda=0$$

$$\boxed{(a-b)^3} = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

$$(28-11\lambda+\lambda^2)(-2-\lambda)+83-21\lambda=0$$

$$-56-28\lambda+22\lambda+11\lambda^2-2\lambda^2-\lambda^3+83-21\lambda=0$$

$$-\lambda^3+9\lambda^2-27\lambda+27=0 \quad /:(-1)$$

$$\underbrace{\lambda^3-9\lambda^2+27\lambda-27}_{(\lambda-3)^3}=0$$

$$(\lambda-3)^3=0$$

$$\boxed{\lambda_{1,2,3}=3}$$

Vlastní vektory matice $F = \begin{bmatrix} 7 & -1 & -5 \\ -4 & 4 & 5 \\ 4 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ pro vl. číslo $\lambda_{1,2,3} = 3$.

$$(F - 3E) \cdot \vec{x} = \vec{o}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -5 \\ -4 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & -1 & -5 \\ \cancel{-4} & \cancel{1} & \cancel{5} \\ \cancel{4} & \cancel{-1} & \cancel{-5} \end{bmatrix}$$

$4x - y - 5z = 0$

$z = t \ (t \in \mathbb{R})$

$x = s \ (s \in \mathbb{R})$

$y = -5t + 4s$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} s \\ -5t + 4s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ +4s \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -5t \\ t \end{bmatrix} = \boxed{s \begin{bmatrix} 1 \\ +4 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ +4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$G = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 3 \\ -10 & 2 & 13 \\ +1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

char. rovnice: $\det(G - \lambda E) = 0$

$$\det \begin{bmatrix} -3-\lambda & 1 & 3 \\ -10 & 2-\lambda & 13 \\ 1 & 0 & -2-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{matrix} -3-\lambda & 1 & 3 \\ -10 & 2-\lambda & 13 \end{matrix}$$

$$\boxed{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

$$(-3-\lambda)(2-\lambda)(-2-\lambda) + 13 - [3(2-\lambda) - 10(-2-\lambda)] = 0$$

$$(-3-\lambda)(2-\lambda)(-2-\lambda) + 13 - (6 - 3\lambda + 20 + 10\lambda) = 0$$

$$(-3-\lambda)(2-\lambda)(-2-\lambda) - 13 - 7\lambda = 0$$

$$-\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1 = 0 \qquad \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$$

$$(\lambda+1)^3 = 0$$

$$\boxed{\lambda_{1,2,3} = -1}$$

Vl. vektory $G = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 3 \\ -10 & 2 & 13 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ pro $\lambda_{1,2,3} = -1$

$$(G - \lambda E)\cdot \vec{x} = \vec{o} \longrightarrow (G + E)\cdot \vec{x} = \vec{o}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -10 & 3 & 13 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -10 & 3 & 13 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-5) \\ \\ 2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ \cancel{0} & \cancel{-2} & \cancel{-2} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-2x + y + 3z = 0$$
$$y + z = 0$$

$z = t \ (t \in \mathbb{R})$

$y = -t$

$-2x = t - 3t = -2t$

$x = t$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} t \\ -t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{representant}} \boxed{\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$G = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 3 \\ -10 & 2 & 13 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = -1$$

kořenový činitel je $(\lambda - (-1))$

$(\lambda + 1)$

$$\det(G - \lambda E) = 0$$

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda+1) \cdot \text{něco} = (\lambda+1)(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = 0$$

$$H = \begin{bmatrix} -8 & 5 & 10 \\ 10 & -3 & -10 \\ -10 & 5 & 12 \end{bmatrix} \qquad \det(H - \lambda E) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} -8-\lambda & 5 & 10 \\ 10 & -3-\lambda & -10 \\ -10 & 5 & 12-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{matrix} -8-\lambda & 5 & 10 \\ 10 & -3-\lambda & -10 \end{matrix}$$

$$0 = (-8-\lambda)(-3-\lambda)(12-\lambda) + 500 + 500 - \left[-100(-3-\lambda) - 50(-8-\lambda) + 50(12-\lambda)\right]$$

$$0 = (-8-\lambda)(-3-\lambda)(12-\lambda) + 1000 - (300 + 100\lambda + 400 + \cancel{50\lambda} + 600 - \cancel{50\lambda})$$

$$0 = (-8-\lambda)(-3-\lambda)(12-\lambda) - 300 - 100\lambda = (-8-\lambda)(-3-\lambda)(12-\lambda) + 100(-3-\lambda)$$

$$0 = (-3-\lambda)\cdot\left[(-8-\lambda)(12-\lambda) + 100\right] = (-3-\lambda)\cdot(\lambda^2 - 4\lambda + 4)$$

$$\boxed{0 = (-3-\lambda)(\lambda-2)^2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda_1 &= -3 \\ \lambda_{2,3} &= 2 \end{aligned}}$$

Vl. vektory $H = \begin{bmatrix} -8 & 5 & 10 \\ 10 & -3 & -10 \\ -10 & 5 & 12 \end{bmatrix}$ příslušné $\lambda_1 = -3$

$(H + 3E) \cdot \vec{x} = \vec{o}$

$$\begin{bmatrix} -5 & 5 & 10 \\ 10 & 0 & -10 \\ -10 & 5 & 15 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -5 & 5 & 10 \\ 10 & 0 & -10 \\ -10 & 5 & 15 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ \\ \end{matrix} \; (-2) \sim \begin{bmatrix} -5 & 5 & 10 \\ 0 & 10 & 10 \\ \cancel{0} & \cancel{-5} & \cancel{-5} \end{bmatrix} \begin{matrix} (:5) \\ (:10) \\ \\ \end{matrix}$$

$-x + y + 2z = 0$

$y + z = 0$

$z = t \quad (t \in \mathbb{R})$

$y = -t$

$x = -t + 2t = t$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} t \\ -t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{repr.}} \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vl. vektory $H = \begin{bmatrix} -8 & 5 & 10 \\ 10 & -3 & -10 \\ -10 & 5 & 12 \end{bmatrix}$ příslušné $\lambda_{2,3} = 2$

$$(H - 2E) \cdot \vec{x} = \vec{o}$$

$$\begin{bmatrix} -10 & 5 & 10 \\ \cancel{10} & \cancel{5} & \cancel{10} \\ \cancel{-10} & \cancel{5} & \cancel{10} \end{bmatrix} (:5) \qquad -2x + y + 2z = 0$$

$z = t \; (t \in \mathbb{R})$

$x = s \; (s \in \mathbb{R})$

$y = 2s - 2t$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} s \\ 2s - 2t \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

repr.

$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$