Polynomy a racionální funkce

Polynom stupně n nad tělesem $\mathbb{R}$ je výraz

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n, \text{ kde } a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0.$$

příklady:

$$p(x) = x^{5} - 2x + 7$$

$$q(x) = x^{2} - 5x + 2$$

$$r(x) = x^5 + x^{9}$$

$$s(x) = 7x^0$$

$$A(x) = 2x^1 - 3$$

Koreň polynomu $p(x)$ je také číslo $t \in \mathbb{R}$, že

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n = 0$$

Prvok t je koreň polynomu $p(x)$ práve tehdy, keď $(x-t)$ delí polynom $p(x)$. Najvyšší číslo l také, že $(x-t)^l$ delí polynom $p(x)$ sa nazýva násobnosť koreňa t.

$$p(x) = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \qquad x_1 = 2$$
$$x_2 = 3$$

$$s(x) = x^2 + 4x + 5$$

$$x^2 + 4x + 5 = 0 \qquad \emptyset$$

$$q(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 = (x-2)(x-2)$$

$p(x) = 2x^3 - 8x^2 + 10x - 4$

$2x^3 - 8x^2 + 10x - 4 = 0$ uhádneme koreň $x = 1$

$2x^3 - 8x^2 + 10x - 4 = (x-1) \cdot$ něco $= (x-1)(2x^2 - 6x + 4) =$

$(2x^3 - 8x^2 + 10x - 4) : (x - 1) = 2x^2 - 6x + 4$

$-(2x^3 - 2x^2)$

$\quad -6x^2 + 10x - 4$

$\quad -(-6x^2 + 6x)$

$\qquad 4x - 4$

$\qquad -(4x - 4)$

$\qquad\quad 0$

$= 2 \cdot (x-1)(x^2 - 3x + 2) =$

$= 2 \cdot (x-1)(x-1)(x-2) =$

$= 2 \cdot (x-1)^2 (x-2) = p(x)$

$$q(x) = x^3 + 1 = (x+1)\cdot \text{něco} = (x+1)(x^2 - x + 1)$$

$$x^3 + 1 = 0$$

$$x^3 = -1 \rightarrow x = -1$$

$$(x^3 + 1) : (x + 1) = x^2 - x + 1$$

$$-(x^3 + x^2)$$

$$-x^2 + 1$$

$$-(-x^2 - x)$$

$$x + 1$$

$$-(x + 1)$$

$$0$$

Každý polynom nad $\mathbb{R}$ stupně alespoň 1 lze psát jako součin konstanty, lineárních polynomů (tzv. kořenových činitelů) a nerozložitelných kvadratických polynomů (diskriminant < 0).

Racionální funkce

Racionální funkce je funkce ve tvaru $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, kde $p(x)$ a $q(x)$ jsou polynomy. Pokud je stupeň polynomu $q(x)$ ve jmenovateli ostře větší než stupeň polynomu v čitateli $p(x)$, nazýváme $R(x)$ <u>ryze racionální</u> funkce. V opačném případě je neryze racionální.

$$R_1(x) = \frac{x}{x^3 - 2x + 1}$$

je ryze rac. fce.

$$R_2(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 7x + 8}$$

není ryze rac.

$$R_3(x) = \frac{x^2 - x + 8}{(x-1)(x^2 + x)}$$

je ryze rac. funkce.

Příklad:

$$R(x) = \frac{x^4+1}{x^2+1} = x^2 - 1 + \frac{2}{x^2+1}$$

$$
\begin{array}{l}
(x^4+1):(x^2+1) = x^2-1 \\
-(x^4+x^2) \\
\hline
-x^2+1 \\
-(-x^2-1) \\
\hline
2 \quad \text{zbytek}
\end{array}
$$

→ Neryze racionální funkce lze vyjádřit jako součet polynomu a ryze racionální funkce. (Výpočet dělením.)

$$\int \frac{x^4+1}{x^2+1}\,dx = \int \left(x^2 - 1 + \frac{2}{x^2+1}\right) dx = \frac{x^3}{3} - x + 2\arctan x + c$$

$x \in (-\infty, +\infty)$

$$Q(x) = \frac{x^3 - x + 1}{x^2 - 1} = x + \frac{1}{x^2-1}$$

$$\begin{array}{l} (x^3 - x + 1) : (x^2 - 1) = x \\ -(x^3 - x) \\ \hline \quad 1 \end{array}$$

?

$$\int \frac{x^3 - x + 1}{x^2 - 1} dx = \int \left(x + \frac{1}{x^2-1} \right) dx = \int \left(x + \frac{1}{(x+1)(x-1)} \right) dx$$

Rozklad na parciální zlomky

Parciální zlomky jsou tyto druhy zlomků:

$$\frac{A}{(x-r)^k}, \quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}, \text{ kde } A, B, C, p, q, r \in \mathbb{R}$$

$k \in \mathbb{N}$

a $p^2-4q<0$ (diskriminant)

Každou ryze racionální funkci lze vyjádřit ve tvaru součtu parciálních zlomků.

Návod: 1) Neryze racionální funkci vydělením převedeme na součet polynomu + ryze racionální funkce.

2) Jmenovatel rozložíme na součin kořenových činitelů a nerozložitelných polynomů stupně 2.

3) Ke každému kořenovému činiteli vytvoříme parciální zlomky v počtu odpovídajícím násobnosti příslušného kořene:

$$\frac{A_1}{x-r}, \frac{A_2}{(x-r)^2}, \dots, \frac{A_k}{(x-r)^k}$$

4) Podobně ke každému nerozložitelnému polynomu st. 2. ve jmenovateli v mocnině k sestavíme k zlomků:

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}, \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2}, \dots, \frac{B_kx+C_k}{(x^2+px+q)^k}$$

Příklady:

$$\frac{1}{x^2-1} = \boxed{\frac{1+0x}{(x+1)(x-1)}} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-1)} =$$ převedení na spol. jmenovatele

potřebujeme určit konstanty A a B

$$= \frac{A(x-1)+B(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{Ax-A+Bx+B}{(x+1)(x-1)} = \boxed{\frac{(A+B)\cdot x - A + B}{(x+1)(x-1)}}$$

porovnáváme koeficienty u x: $A+B=0$

x^0: $-A+B=1$

$2B=1 \rightarrow B=\frac{1}{2}$ $A=-\frac{1}{2}$

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \int\left(\frac{-\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1}\right)dx = -\frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x-1| + c$$

pro $x \neq \pm 1$

$$\frac{1x^2-3x+1}{(x-3)(x-2)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-2)^2} = \frac{A(x-2)^2 + B(x-3)(x-2) + C(x-3)}{(x-3)(x-2)^2} =$$

$$= \frac{A(x^2-4x+4) + B(x^2-5x+6) + C(x-3)}{(x-3)(x-2)^2} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{(x-2)^2}$$

$u\,x^2: \; A + B = 1$

$u\,x: \; -4A - 5B + C = -3 \quad / \cdot 3$

$u\,x^0: \; 4A + 6B - 3C = 1$

$$\left.\begin{aligned} A + B &= 1 \\ -8A - 9B &= -8 \end{aligned}\right. \quad / \cdot (9)$$

$A = 1 \quad B = 0 \quad C = 1$

$-\frac{1}{x-2}$

$=$

$$\int \frac{x^2-3x+1}{(x-3)(x-2)^2}\,dx = \int\left(\frac{1}{x-3} + \frac{1}{(x-2)^2}\right)dx = \ln|x-3| + \frac{(x-2)^{-1}}{-1} + c$$

$x \neq 2, 3$

$$\frac{3x^2+x+2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)} =$$

$$= \frac{Ax^2+A+Bx^2-Bx+Cx-C}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{\overset{3}{(A+B)}\,x^2+\overset{1}{(-B+C)}\,x+\overset{2}{A-C}}{(x-1)(x^2+1)} = \underline{\underline{\frac{3}{x-1}+\frac{1}{x^2+1}}}$$

u x^2: $A+B=3$

u x: $-B+C=1$

u x^0: $A-C=2$

$$\left.\begin{array}{l} A+B=3 \\ -B+C=1 \end{array}\right\} A+C=4$$

$$A-C=2$$

$$2A=6 \rightarrow A=3$$

$$B=0$$

$$C=1$$