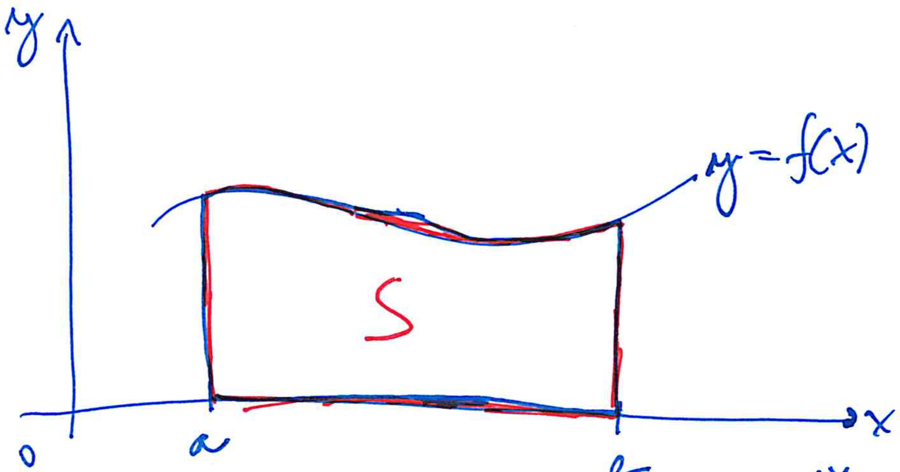
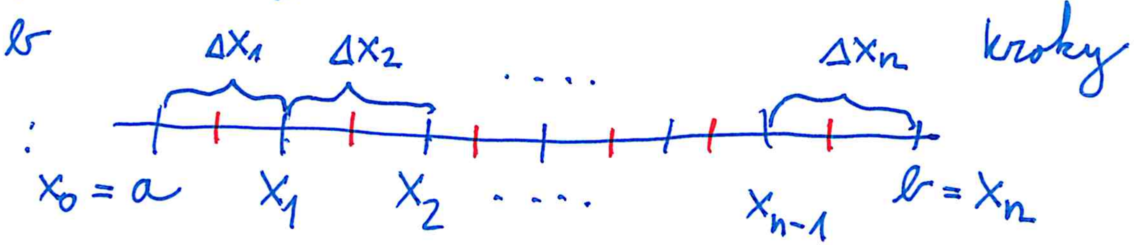
# Určitý integrál

Obsah mezi grafem nezáporné spojité funkce a intervalem $\langle a, b\rangle$ na $x$



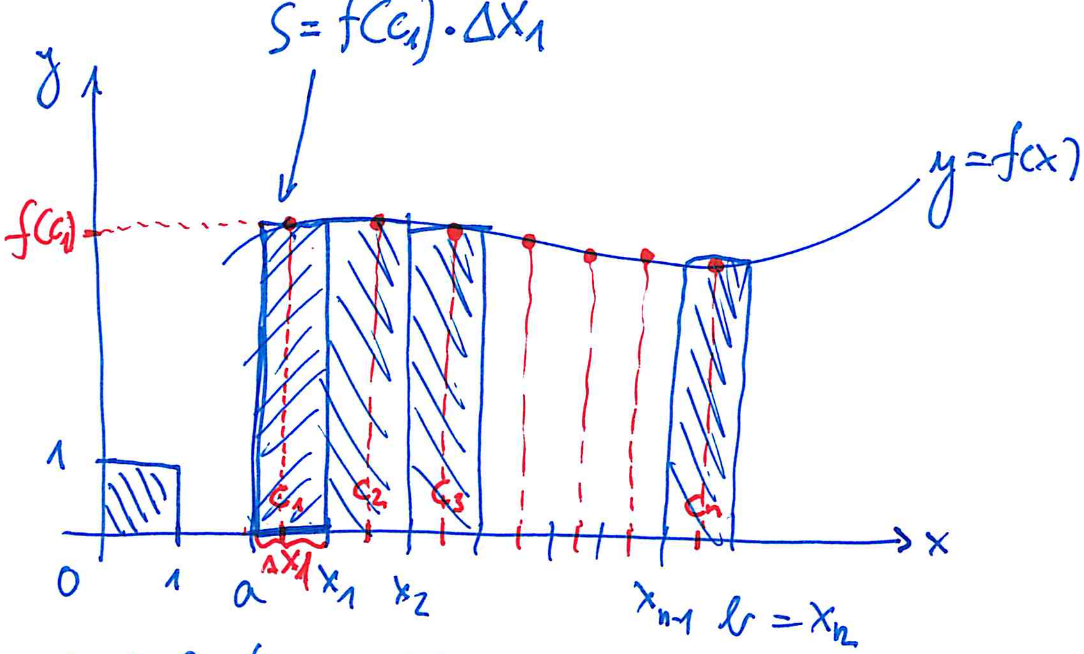

dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ : $\mathcal{D}$




zjemnění dělení

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0$$
$$\Delta x_2 = x_2 - x_1$$
$$\dots$$
$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \qquad i = 1 \dots n$$

vybereme největší krok → norma dělení $h(\mathcal{D})$




1) dělení $\langle a,b\rangle$

2) v každém dílčím intervalu zvolíme libovolně bod $c_i$ a spočítáme $f(c_i)$

3) Součet obsahů obdélníků je tzv. integrální součet:

$$f(c_1)\cdot\Delta x_1 + f(c_2)\cdot\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\,\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$$

4) Zjemňováním dělení vytváříme posloupnost zlepšujících se odhadů. Má-li tato posloupnost limitu $(h(D)\to 0)$, je tato limita přesnou hodnotou hledaného obsahu a nazývá se určitý integrál funkce $f(x)$ na $\langle a,b\rangle$ (*)

(*) a značí se

$$\int_a^b f(x)\,dx .$$

(tzv. Riemannův integrál)

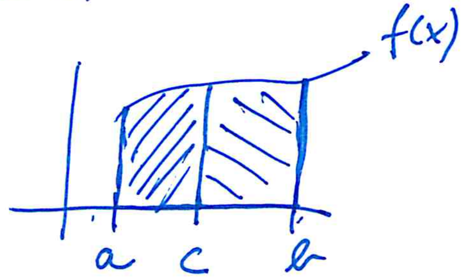
Funkce $f(x)$ se pak nazývá integrovatelná na $\langle a,b\rangle$

Spojitá funkce na $\langle a,b\rangle$ je na $\langle a,b\rangle$ integrovatelná

Omezená po částech spojitá funkce na $\langle a,b\rangle$ je na $\langle a,b\rangle$ integrovatelná

<u>Vlastnosti</u>: 1) Jestliže je $f(x)$ integrovatelná na $\langle a,b\rangle$ a $a<c<b$, je integrovatelná i na $\langle a,c\rangle$ a $\langle c,b\rangle$ a platí

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$



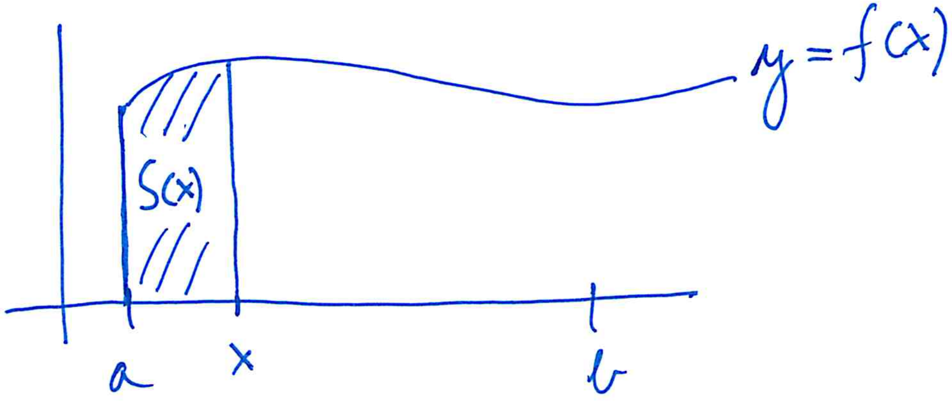

2) pro $\alpha \in \mathbb{R}$:
$$\int_a^b \alpha \cdot f(x)\,dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

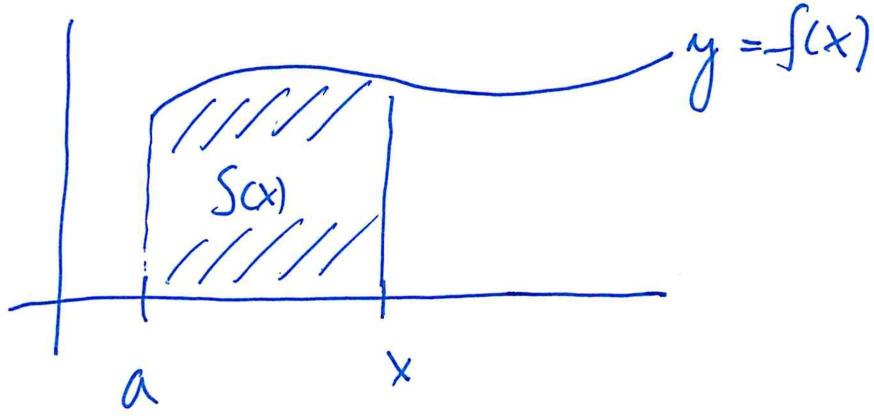
3)
$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

4)
$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

# Výpočet určitého integrálu

Mějme pevně danou funkci $y = f(x)$ (spojitou a nezápornou na $\langle a, b\rangle$)




$S(x)$ je funkce – obsah mezi intervalem $\langle a, x\rangle$ a grafem $f(x)$ pro $x \in \langle a, b\rangle$

$$\boxed{S(x) \text{ je primitivní funkce k } f(x)}$$

Známe-li nějakou primitivní funkci $F(x)$, musí platit, že $S(x) = F(x) + c$, pro nějakou hodnotu $c$. $S(a) = 0$ $\quad 0 = S(a) = F(a) + c \rightarrow c = -F(a)$

$S(x) = F(x) + c$ a $c = -F(a)$

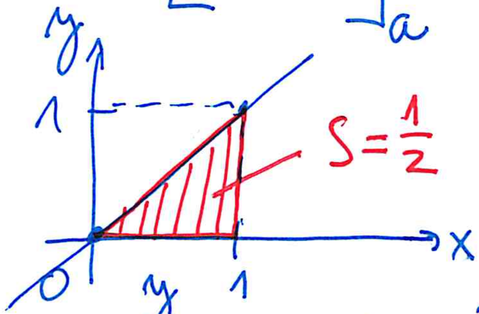
$S(x) = F(x) - F(a)$

Newtonova-Leibnizova formule

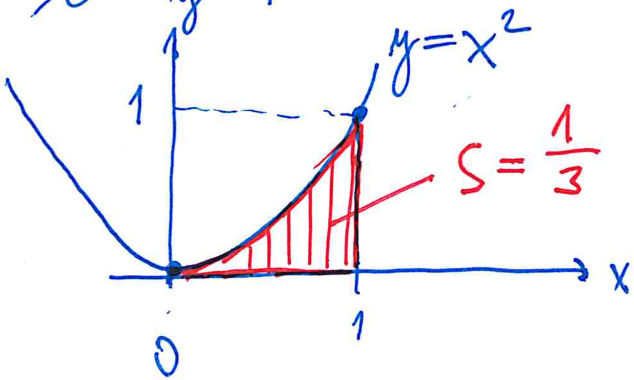
$$S(b) = \boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

značení: $F(b) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b$

$$\int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}$$

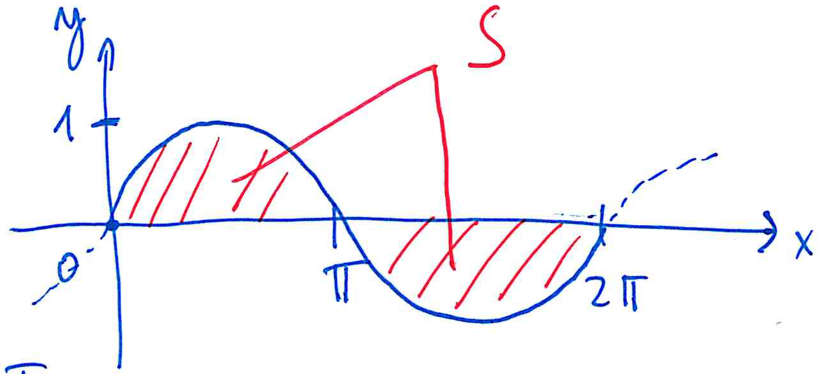



$$\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$



$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = \left[-\cos x\right]_0^{2\pi} = -1 - (-1) = 0$$

ale




$$S \neq \int_0^{2\pi} \sin x \, dx$$

$$S = 2 \cdot \int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2 \cdot \left[\cos x\right]_0^{\pi} = 2\left(1 - (-1)\right) = 2 \cdot 2 = \underline{\underline{4}}$$