Vlastní čísla a vlastní vektory matic

čtvercová matice A typu $n \times n$

$\vec{x}, \vec{y}$ - sloupcové vektory - matice $n \times 1$

$$A \cdot \vec{x} = \vec{y}$$

za jakých podmínek je pro danou matici A vektor $\vec{x}$ rovnoběžný s vektorem $\vec{y}$? Tj. vektor $\vec{y}$ je násobkem vektoru $\vec{x}$: $\vec{y} = \lambda \vec{x}$ (λ je skalár)

$$\boxed{A \cdot \vec{x} = \lambda \vec{x}}$$

Pro danou matici A hledáme skalár λ a sloupcový vektor $\vec{x}$, aby platilo

$$A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$$

$$A \cdot \vec{x} - \lambda \cdot \vec{x} = \vec{o}$$

$$A \cdot \vec{x} - \lambda E \vec{x} = \vec{o}$$ (E je jednotková matice stejného typu jako A)

$$\boxed{(A - \lambda E) \cdot \vec{x} = \vec{o}}$$ (2)

To je homogenní soustava s maticí $A - \lambda E$ pro neznámý vektor $\vec{x}$.

Chceme nenulové řešení → chceme ∞ řešení → v eliminaci matice $A - \lambda E$ se musí vynulovat aspoň jeden řádek →

$$\boxed{\det(A - \lambda E) = 0}$$ (1) charakteristická rovnice

Nechť A je (reálná nebo komplexní) čtvercová matice $n \times n$. Komplexní číslo λ se nazývá vlastní číslo matice A, existuje-li ~~n~~ nenulový aritmetický vektor $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ takový, že platí

$$\boxed{A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}.}$$

Pro vlastní číslo λ definujeme vlastní vektor matice A příslušný k vlastnímu číslu λ jako každý (i nulový) vektor $\vec{x}$, pro který platí uvedená rovnost $A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$.

Postup: 1) Řešíme char. rovnici (1): $\det(A - \lambda E) = 0$

Tím získáme vl. čísla λ.

2) Pro každé λ zvlášť řešíme soustavu (2): $(A - \lambda E) \cdot \vec{x} = \vec{o}$

Tím pro každé λ získáme příslušné vl. vektory

<u>Příklad</u>: Hledáme vlastní čísla a vlastní vektory matic:

1) $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

char. rovnice $\det(A - \lambda E) = 0$

$$0 = \det\left(\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix} 6-\lambda & 2 \\ -2 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$0 = (6-\lambda)(1-\lambda) - (-4) = 10 - 7\lambda + \lambda^2 = (\lambda-2)(\lambda-5)$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= 2 \\ \lambda_2 &= 5 \end{aligned}\right\} \text{vlastní čísla matice } A$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 5$$

2) Hledáme vl. vektory pro $\lambda_1 = 2$: $(A - \lambda E) \cdot \vec{x} = \vec{o}$

$$(A - 2E) \cdot \vec{x} = \vec{o}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$4x + 2y = 0$

$-2x - y = 0 \rightarrow y = -2x \qquad x = t \qquad t \in \mathbb{R}$

$y = -2t$

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} t \\ -2t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \rightarrow$$

volíme reprezentanta

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Zkouška:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}}_{\vec{x}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \underbrace{2}_{\lambda} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}}_{\vec{x}}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = 2, \ \lambda_2 = 5$$

3) Hledáme vl. vektory pro $\lambda_2 = 5$: $(A - \lambda E) \cdot \vec{x} = \vec{o}$

$$(A - 5E) \cdot \vec{x} = \vec{o}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad x + 2y = 0 \qquad y = s \quad s \in \mathbb{R}$$

$$x = -2y \qquad x = -2s$$

$$\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} -2s \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{reprezentanta}} \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

zkouška: $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 5 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

1) charakteristická rovnice $\det(B - \lambda E) = 0$

$$0 = \det \begin{bmatrix} -3-\lambda & 2 \\ -2 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (-3-\lambda)(1-\lambda) + 4 = 1 + 2\lambda + \lambda^2 = 0$$

$$(\lambda+1)^2 = 0$$

$$\underline{\lambda_{1,2} = -1}$$

2) hledáme vl. vektory pro $\lambda_{1,2} = -1$: $(B - \lambda E)\cdot\vec{x} = \vec{o}$

$$(B + E)\cdot\vec{x} = \vec{o}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad -2x + 2y = 0$$

$$x = y = r, \; r \in \mathbb{R} \qquad \vec{x} = \begin{bmatrix} r \\ r \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

reprezentant: $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$C = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 8 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

1) char. rovnice: $\det(C - \lambda E) = 0$

$$0 = \det \begin{bmatrix} -2-\lambda & -2 & 8 \\ -1 & -\lambda & 3 \\ -1 & -1 & 4-\lambda \end{bmatrix} =$$

$$\begin{matrix} -2-\lambda & -2 & 8 \\ -1 & -\lambda & 3 \end{matrix}$$

$$= (-2-\lambda)(-\lambda)(4-\lambda) + 8 + 6 - \left[8\lambda - 3(-2-\lambda) + 2(4-\lambda)\right] =$$

$$= 8\lambda - 2\lambda^2 + 4\lambda^2 - \lambda^3 + 14 - (9\lambda + 14) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda = 0 =$$

$$= -\lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = -\lambda(\lambda - 1)^2$$

$$\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_{2,3} = 1$$

$$C = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 8 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \lambda_1 = 0 \qquad \lambda_{2,3} = 1$$

2) hledáme vl. vektory příslušné $\lambda_1 = 0$:

$$(C - \lambda E) \cdot \vec{x} = \vec{o}$$
$$(C - 0E) \cdot \vec{x} = \vec{o}$$
$$C \cdot \vec{x} = \vec{o}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 8 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

eliminujeme:

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 8 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ (-2) \leftarrow \\ (-2) \leftarrow \end{array} \sim \begin{bmatrix} -2 & -2 & 8 \\ 0 & -2 & 2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \cdot \frac{1}{2} \\ \cdot \frac{1}{2} \\ \end{array}$$

$$-x - y + 4z = 0$$
$$-y + z = 0 \qquad y = z = t \; (t \in \mathbb{R})$$
$$x = 4z - y = 4t - t = 3t$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 3t \\ t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

reprezentant

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 8 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} &\lambda_1 = 0 \quad \vec{x}_1 = (3, 1, 1) \\ &\lambda_{2,3} = 1 \end{aligned}$$

3) hledáme vl. vektor pro $\lambda_{2,3} = 1$: $(C - \lambda E) \cdot \vec{x} = \vec{o}$

$$(C - E) \cdot \vec{x} = \vec{o}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & -2 & 8 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & -2 & 8 \\ -1 & -1 & 3 \\ \cancel{-1} & \cancel{-1} & \cancel{3} \end{bmatrix} (-3) \sim \begin{bmatrix} -3 & -2 & 8 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$-3x - 2y + 8z = 0$$

$$y - z = 0 \quad y = z = t \ (t \in \mathbb{R})$$

$$-3x = 2t - 8t = -6t$$

$$x = 2t$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 2t \\ t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

1) charakteristická rovnice $\det(D-\lambda E)=0$

$$0=\det\begin{bmatrix} 2-\lambda & -2 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{bmatrix} =$$

$$\begin{matrix} 2-\lambda & -2 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \end{matrix}$$

$$= (2-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda) - \left[-(2-\lambda)\right] = (2-\lambda)\left[(1-\lambda)(3-\lambda)+1\right] =$$

$$= (2-\lambda)\cdot(\lambda^2-4\lambda+4) = (2-\lambda)(\lambda-2)^2 = \underline{-(\lambda-2)^3 = 0}$$

$$\underline{\underline{\lambda_{1,2,3} = 2}}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \lambda_{1,2,3} = 2$$

Hledáme vl. vektor pro $\lambda_{1,2,3} = 2$: $(D - 2E) \cdot \vec{x} = \vec{o}$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} s \\ t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ t \end{bmatrix} = s \underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} + t \underline{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$-y + z = 0$

$y = z = t \quad (t \in \mathbb{R})$

$x = s \quad (s \in \mathbb{R})$

$$\vec{x_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{x_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

1) char. rovnice : $\det(F - \lambda E) = 0$

$$0 = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)^2 + 4 =$$

$$= 13 - 6\lambda + \lambda^2 = 0$$

$$\cancel{\lambda_{1,2}=}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-52}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}\,\sqrt{-1}}{2} = \frac{6 \pm 4i}{2} = \underline{\underline{3 \pm 2i}}$$

$$F = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = 3+2i \quad \lambda_2 = 3-2i$$

2) Hledáme vl. vektory pro $\lambda_1 = 3+2i$: $(F - \lambda E)\vec{x} = \vec{o}$

$$(F - (3+2i)E)\cdot \vec{x} = \vec{o}$$

$$\begin{bmatrix} 3-(3+2i) & -2 \\ 2 & 3-(3+2i) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2i & -2 \\ 2 & -2i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow 2x - 2iy = 0 \quad y = t \ (t \in \mathbb{C})$$

(druhý řádek $\times (-i)$ = první řádek)

$$x = iy = it$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} it \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}}$$

3) pro $\lambda_2 = 3-2i$ stačí vektor $\vec{x}_1$ komplexně sdružit

$$\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$$