1 Aritmetické vektory

Dalšími objekty, jimiž se zabývá lineární algebra, jsou vektory. My se zaměříme pouze na tzv. aritmetické vektory, které znáte např. z geometrie nebo z fyziky. Poznamenejme ale, že vektorový charakter má spousta matematických objektů, mimo jiné třeba matice nebo funkce.

Aritmetickým vektorem (případně *n-rozměrným aritmetickým vektorem*) nad tělesem $\mathbb{R}$ nazýváme uspořádanou n-tici reálných čísel. Přirozené číslo n nazýváme dimenzí vektoru a množinu všech aritmetických vektorů značíme $\mathbb{R}^n$ nazýváme aritmetický vektorový prostor dimenze n. Zkráceně budeme často říkat jen prostor. Obecnou definici vektorového prostoru tady uvádět nebudu. Vektory značíme malými písmeny, v sázeném textu tučně. V ručně psaném textu děláme nad písmeno označující vektor šipku. Píšeme např. $\boldsymbol{x} = (1, 2, 3, 4)$, v rukopise $\vec{x} = (1, 2, 3, 4)$. Vektor $\boldsymbol{x}$ je tedy čtyřrozměrný aritmetický vektor, je to prvek prostoru $\mathbb{R}^4$. Vektor $\boldsymbol{y} = (-1, \sqrt[3]{2})$ je dvourozměrný aritmetický vektor a $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$. Obecně vektor z prostoru $\mathbb{R}^n$ zapisujeme $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. V každém prostoru existuje tzv. nulový vektor. Značíme ho $\boldsymbol{o}$ a platí $\boldsymbol{o} = (0, 0, \ldots, 0)$.

Pro vektory jsou důležité dvě základní operace, které jsou přímo součástí formální definice vektorového prostoru. Jedná se o sčítání vektorů a o násobení vektoru skalárem. Skalárem nazýváme v našem speciálním případě vždy reálná čísla. Pro aritmetické vektory jsou obě tyto operace definovány velmi jednoduše tzv. po prvcích a pro $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ platí:

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_2 + y_n),$$

$$\alpha \cdot \boldsymbol{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n).$$

Sčítáme samozřejmě vždy vektory ze stejného prostoru. Konkrétně máme např. $(1, 2, 3)+(1, 0, -1) = (2, 2, 2)$ nebo $7 \cdot (1, 0, 9) = (7, 0, 63)$ v prostoru $\mathbb{R}^3$. Kombinací sčítání a násobení -1 dostáváme odčítání: $(9, 3, 6, 2, 1) - (1, 0, 0, 0, 1) = (8, 3, 6, 2, 0)$ v prostoru $\mathbb{R}^5$. Součet vektorů z různých prostorů není definován: $(1, 2, 3) + (3, 3)$ nedává smysl.

Všimněme si, že obě základní operace s vektory jsou velmi podobné maticím. Porovnejme např.

$$(1, 2, 3, 4) + (1, 1, 1, 1) = (2, 3, 4, 5), -2 \cdot (1, 2, 0, 1) = (-2, -4, 0, -2)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, -2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Nebo také

$$1+2x+3x^2+4x^3 = 1+x+x^2+x^3 = 2+3x+4x^2+5x^3, -2\cdot(1+2x+0x^2+x^3) = -2-4x+0x^2-2x^3.$$

Díky tomu, že i sčítání a násobení skalárem jiných objektů je podobné těmto operacím u aritmetických vektorů, označujeme v obecnější teorii i tyto objekty jako vektory. Matice, polynomy nebo obecně funkce tedy mohou být také vektory. I když v našem základním kurzu se tomuto nebudeme dále věnovat, v kapitole o diferenciálních rovnicích (dostaneme-li se se až na konec sylabu tohoto předmětu) budeme potřebovat lineární závislost a nezávislost funkcí. O lineární závislosti a nezávislosti aritmetických vektorů se dozvíte v další kapitole.

Podobnosti operací u aritmetických vektorů a u matic se využívá i "obráceným"způsobem. Ukazuje se jako výhodné nahlížet na aritmetické vektory jako na matice, které mají jeden řádek (tzv. řádkový vektor) případně jako jeden sloupec (tzv. sloupcový vektor). Pak totiž můžeme využít naše znalosti získané v kapitole o maticích i na vektory. Velmi užitečné je třeba maticové násobení, jak uvidíme později. Máme-li např. v prostoru $\mathbb{R}^3$ vektor $\boldsymbol{x} = (1, 3, 5)$, nazýváme ho řádkový vektor (je zapsaný do řádku) a nahlížíme na $\boldsymbol{x}$ jako na matici, která má jeden řádek a tři sloupce. (Jediný rozdíl v zápisu je, že mezi prvky matice zpravidla nepíšeme čárky.) V některých situacích může být výhodné zapisovat vektor $\boldsymbol{x}$ naopak jako matici, která má jeden sloupec a tři řádky: $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$. Potom říkáme, že $\boldsymbol{x}$ je sloupcový vektor. Formálně by bylo správné v zápise řádkový a sloupcový vektor odlišovat, my ale žádné odlišovací značení zavádět nebudeme. Zda se jedná o řádkový nebo sloupcový vektor bude vždy jasné z kontextu. Je li např. $\mathbf{A}$ matice typu 3×3, musí být v součinu $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x}$ vektor $\boldsymbol{x}$ sloupcový vektor. Jinak by totiž součin nebyl definován. Výsledkem je opět sloupcový vektor. Konkrétně to může vypadat třeba takto:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ -6 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

1.1 Lineární kombinace, (ne)závislost

Pro práci s aritmetickými vektory jsme vybaveni zatím jenom sčítáním vektorů a násobením vektoru skalárem. Tyto (na první pohled možná trochu skromné prostředky) nám umožňují definovat lineární kombinaci vektorů. Lineární kombinace je vlastně způsob, jak ze zadaných vektorů vyrábět další vektory. Mějme na prostoru $\mathbb{R}^2$ vektory $\boldsymbol{a} = (1,2)$ a $\boldsymbol{b} = (3,3)$. Protože umíme vektory násobit skaláry a sčítat, zvolíme si libovolně skaláry (např. 2 a 5), každý vektor vynásobíme jedním skalárem a výsledky sečteme. Dostaneme $2\boldsymbol{a} + 5\boldsymbol{b} = 2(1,2) + 5(3,3) = (2,4) + (15,15) = (17,19)$. Tímto jsme z původních vektorů vyrobili nový vektor, tento vektor (i způsob jeho výpočtu) se nazývá lineární kombinace vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$. Říkáme, že vektor $(17,19)$ je lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$. Lineárních kombinací vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ je spousta (nekonečně mnoho). Již ne tak evidentní je fakt, že dokonce každý dvourozměrný aritmetický vektor lze získat jako lineární kombinaci vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$. Obecně:

Definice 1 *Buďte $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_k}$ vektory z prostoru $\mathbb{R}^n$ a skaláry $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$. Lineární kombinací těchto vektorů nazýváme vektor $\alpha_1\boldsymbol{x_1} + \alpha_2\boldsymbol{x_2} + \dots + \alpha_k\boldsymbol{x_k}$. Pokud jsou všechny skaláry rovny nule, nazývá se kombinace $0\boldsymbol{x_1} + 0\boldsymbol{x_2} + \dots + 0\boldsymbol{x_k}$ triviální lineární kombinace. Všechny ostatní kombinace se nazývají netriviální.*

Vraťme se ještě k vektorům $\boldsymbol{a} = (1,2)$ a $\boldsymbol{b} = (3,3)$. Vytvářet nahodile jejich lineární kombinace je snadné, jak jsme viděli v předchozím výpočtu. Zajímavější je ale následující úloha: vyjádřete vektor $\boldsymbol{c} = (0,3)$ jako lineární kombinaci vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$. Hledáme tedy čísla α a β taková, aby platilo

$$\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c},$$

po dosazení

$$\alpha(1,2) + \beta(3,3) = (0,3).$$

Protože násobení skalárem i sčítání aritmetických vektorů probíhá po složkách, dostaneme postupně

$$(\alpha, 2\alpha) + (3\beta, 3\beta) = (0,3)$$

a

$$(\alpha + 3\beta, 2\alpha + 3\beta) = (0,3).$$

Rovněž rovnost je po složkách, takže první složka vpravo musí být stejná jako první složka vlevo. A druhá složka také musí být vlevo i vpravo stejná:

$$\begin{aligned} \alpha + 3\beta &= 0 \\ 2\alpha + 3\beta &= 3, \end{aligned}$$

což je soustava lineárních rovnic pro hledané koeficienty α a β, kterou snadno vyřešíme. Vychází $\alpha = 3$ a $\beta = -1$. Hledaná lineární kombinace je $3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$. Když za vektory dosadíme, snadno ověříme, že to platí: $3(1,2) - (3,3) = (0,3)$. Rozmyslete si také to, že změníme-li zadání vektoru $\boldsymbol{c}$ (vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ zůstanou stejné), vzniklá soustava bude mít vždy právě jedno řešení. Každý dvourozměrný vektor se tedy dá vyjádřit právě jedním způsobem jako lineární kombinace vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$. Takto to není vždy, je to "hezká"vlastnost vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$.

Přesuňme se nyní do $\mathbb{R}^3$ s vektory $\boldsymbol{x} = (1,1,2)$, $\boldsymbol{y} = (1,0,1)$ a $\boldsymbol{z} = (2,1,3)$. Zkusíme vyřešit analogickou úlohu k předchozímu a vyjádříme vektor $\boldsymbol{u} = (1,2,-1)$ jako lineární kombinaci $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ a $\boldsymbol{z}$. Hledáme tedy čísla α, β a γ taková, aby platilo

$$\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} + \gamma\boldsymbol{z} = \boldsymbol{u}.$$

Postupujeme stejně jako před chvílí: dosadíme vektory dle zadání a porovnáním jednotlivých složek dostaneme soustavu lineárních rovnic pro hledaná čísla. Máme tedy

$$\alpha(1,1,2) + \beta(1,0,1) + \gamma(2,1,3) = (1,2,-1).$$

Po roznásobení a sečtení na levé straně:

$$(\alpha + \beta + 2\gamma, \alpha + \gamma, 2\alpha + \beta + 3\gamma) = (1,2,-1)$$

a porovnáním jednotlivých složek dostáváme soustavu:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + 2\gamma &= 1 \\ \alpha + \gamma &= 2, \\ 2\alpha + \beta + 3\gamma &= -1, \end{aligned}$$

v maticovém zápisu

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right].$$

Za povšimnutí stojí, že vektory ze zadání tvoří sloupce vzniklé matice a vektor $\boldsymbol{u}$, který máme vyjádřit, je posední sloupec pravých stran. Soustavu vyřešíme pomocí eliminační metody:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right].$$

Vidíme, že tato soustava nemá řešení a vektor $\boldsymbol{u}$ proto nejde vytvořit jako lineární kombinace $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ a $\boldsymbol{z}$. Zkusíme ještě trošku změnit zadání, místo vektoru $\boldsymbol{z}$ použijeme vektor $\boldsymbol{w} = (2,1,2)$. Všechny ostatní vektory zůstanou stejné, hledáme tedy koeficienty pro kombinaci

$$\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} + \gamma\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}.$$

A opět stejným způsobem (rozepište si jednotlivé kroky) dostáváme soustavu pro neznámé α, β, γ zadanou maticí

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right].$$

Eliminace tentokrát vyjde

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{array}\right].$$

Tato soustava má právě jedno řešení $\alpha = -2$, $\beta = -5$ a $\gamma = 4$. Hledaná kombinace je tedy $-2\boldsymbol{x} - 5\boldsymbol{y} + 4\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}$ neboli $-2(1,1,2) - 5(1,0,1) + 4(2,1,2) = (1,2,-1)$. Shrňme si výsledky:

vektor $\boldsymbol{u}$ se nedá vyjádřit jako lineární kombinace vektorů $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ a $\boldsymbol{z}$, dá se ale vyjádřit jako $-2\boldsymbol{x} - 5\boldsymbol{y} + 4\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}$. Takovéto vyjadřování zde může vypadat trošku samoúčelně, ale je to základní, velmi důležitá úloha pro disciplíny, ve kterých se pracuje s vektory. Vzniká proto otázka, jaký je rozdíl mezi skupinou vektorů $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ a $\boldsymbol{z}$ a skupinou vektorů $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ a $\boldsymbol{w}$. S první totiž naše úloha neměla řešení, s druhou měla právě jedno řešení a bude mít právě jedno řešení i pro jakýkoliv jiný vektor na místě $\boldsymbol{u}$. Považujeme-li tedy tuto úlohu za důležitou, je druhá skupina "hezčí"než skupina první. Jak je ale odlišit? Rozdíl mezi těmito skupinami vektorů spočívá v tom, že jedna je tzv. lineárně nezávislá a druhá lineární závislá. Obsah těchto pojmů shrnuje následující definice.

Definice 2 *Skupina vektorů $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_k}$ z prostoru $\mathbb{R}^n$ se nazývá lineárně závislá, existuje-li netriviální lineární kombinace těchto vektorů rovná nulovému vektoru. Pokud není skupina vektorů lineárně závislá, nazývá se lineárně nezávislá.*

Jestliže zkoumáme lineární závislost nebo nezávislost skupiny vektorů $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_k}$, zajímá nás vždy (bez ohledu na konkrétní zadání vektorů), jakým způsobem z daných vektorů lineární kombinací vyrobíme nulový vektor $\boldsymbol{o}$. Hledáme tedy skaláry $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ takové, aby platilo

$$\alpha_1\boldsymbol{x_1} + \alpha_2\boldsymbol{x_2} + \cdots + \alpha_k\boldsymbol{x_k} = \boldsymbol{o}.$$

Tato úloha má univerzální řešení $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$, protože

$$0\boldsymbol{x_1} + 0\boldsymbol{x_2} + \cdots + 0\boldsymbol{x_k} = \boldsymbol{o},$$

jedná se o tzv. triviální lineární kombinaci. Důležité je, zda je toto jediné řešení nebo zda má úloha i jiné řešení, takové, že alespoň jeden skalár je v kombinaci nenulový. To je tzv. netriviální lin. kombinace. Pokud je nulové řešení jediné, skupina vektorů je lineárně nezávislá. Pokud najdeme nenulové řešení, je skupina vektorů lineárně závislá.

Rozhodněme, zda je skupina vektorů $\boldsymbol{x} = (1, 1, 2)$, $\boldsymbol{y} = (1, 0, 1)$ a $\boldsymbol{z} = (2, 1, 3)$ (první trojice z předešlé úlohy) lineárně závislá nebo nezávislá. Postup, který si nyní předvedeme, je univerzální a řešení bude vždy úplně stejné, lišit se budou pouze konkrétní zadání vektorů. Zkoumáme-li lin. závislost a nezávislost vektorů, začneme vždy lineární kombinací, kterou položíme rovnu nulovému vektoru. Hledáme tedy skaláry α, β, γ takové, aby platilo

$$\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} + \gamma\boldsymbol{z} = \boldsymbol{o}.$$

Dosadíme vektory a počítáme tak, jak jsme již viděli u předchozích úloh na lineární kombinace:

$$\alpha(1, 1, 2) + \beta(1, 0, 1) + \gamma(2, 1, 3) = (0, 0, 0).$$

Po roznásobení a sečtení na levé straně:

$$(\alpha + \beta + 2\gamma, \alpha + \gamma, 2\alpha + \beta + 3\gamma) = (0, 0, 0)$$

a porovnáním jednotlivých složek dostáváme homogenní soustavu:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + 2\gamma &= 0 \\ \alpha + \gamma &= 0, \\ 2\alpha + \beta + 3\gamma &= 0, \end{aligned}$$

v maticovém zápisu

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Připomínám, že u homogenní soustavy nepíšeme do matice (nulovou) pravou stranu. A stejně jako u předchozích úloh s lineární kombinací tvoří zadané vektory sloupce matice soustavy. Provedeme eliminaci

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

v dalším kroku bychom vyškrtli poslední nulový řádek. Každopádně vidíme, že soustava bude mít nekonečně mnoho řešení. Určitě tedy bude existovat nějaké nenulové řešení a skupina zadaných vektorů je lineárně závislá. Odpověď už známe, dořešíme ještě soustavu a nalezneme příslušnou netriviální lineární kombinaci prokazující lineární závislost. Po eliminaci se vrátíme k rovnicím:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + 2\gamma &= 0 \\ -\beta - \gamma &= 0, \end{aligned}$$

Začneme poslední rovnicí a jednu neznámou zvolíme jako parametr, např. $\gamma = t$ pro $t \in \mathbb{R}$. Potom $\beta = -t$ a z první rovnice dopočítáme α: $\alpha = -\beta - 2\gamma = -t$. Jak již bylo řečeno, soustava má nekonečně mnoho řešení, nám ale stačí jedno, zvolíme tedy nějakou konkrétní hodnotu, kterou dosadíme za t, třeba $t = -1$. Zvolit můžeme cokoliv kromě $t = 0$, protože tak vznikne nulové řešení, které nic neprokazuje. Pro hodnotu parametru $t = -1$ dostaneme řešení soustavy $\alpha = 1$, $\beta = 1$ a $\gamma = -1$. Hledaná netriviální lineární kombinace prokazující lineární závislost skupiny vektorů $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ je:

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} - \boldsymbol{z} = \boldsymbol{o}.$$

Prozkoumejme ještě stejným způsobem lin. závislost nebo nezávislost skupiny $\boldsymbol{x} = (1, 1, 2)$, $\boldsymbol{y} = (1, 0, 1)$ a $\boldsymbol{w} = (2, 1, 2)$ (druhá trojice z úlohy na lin. kombinaci). Postup bude úplně stejný jako v předchozím případě. Hledáme opět skaláry α, β, γ takové, aby platilo

$$\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} + \gamma\boldsymbol{w} = \boldsymbol{o}.$$

Dosadíme vektory a počítáme tak, jak jsme již viděli u předchozích úloh na lineární kombinace:

$$\alpha(1, 1, 2) + \beta(1, 0, 1) + \gamma(2, 1, 2) = (0, 0, 0).$$

Po roznásobení a sečtení na levé straně:

$$(\alpha + \beta + 2\gamma, \alpha + \gamma, 2\alpha + \beta + 2\gamma) = (0, 0, 0)$$

a porovnáním jednotlivých složek dostáváme homogenní soustavu:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + 2\gamma &= 0 \\ \alpha + \gamma &= 0 \\ 2\alpha + \beta + 2\gamma &= 0 \end{aligned}$$

v maticovém zápisu (a rovnou i eliminujeme):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

neboli

$$
\begin{aligned}
\alpha + \beta + 2\gamma &= 0 \\
-\beta - \gamma &= 0 \\
-\gamma &= 0
\end{aligned}
$$

Tato soustava bude mít právě jedno řešení řešení $\alpha = 0$, $\beta = 0$ a $\gamma = 0$. To je univerzální řešení, o kterém víme od začátku. Teď ale navíc víme, že to je řešení jediné. Jediná lineární kombinace $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{w}$ rovná nulovému vektoru je triviální kombinace

$$0\boldsymbol{x} + 0\boldsymbol{y} + 0\boldsymbol{w} = \boldsymbol{o}$$

a skupina vektorů $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{w}$ je proto lineárně nezávislá.

Nakonec vezmeme všechny čtyři zkoumané vektory dohromady a podíváme se na lineární (ne)závislost skupiny vektorů $\boldsymbol{x} = (1, 1, 2)$, $\boldsymbol{y} = (1, 0, 1)$, $\boldsymbol{z} = (2, 1, 3)$ a $\boldsymbol{w} = (2, 1, 2)$. Řešení úlohy je zřejmé, protože víme, že $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} - \boldsymbol{z} = \boldsymbol{o}$. To je kombinace prokazující lineární závislost $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ a plyne z ní samozřejmě i lin. závislost celé čtveřice. Můžeme si představovat $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} - \boldsymbol{z} + 0\boldsymbol{w} = \boldsymbol{o}$, což je také netriviální lineární kombinace. Pokud bychom ale předchozí úlohy neřešili, museli bychom opět začít lineární kombinací a bude užitečné si tento postup také ukázat. Hledáme opět skaláry (tentokrát čtyři) $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ takové, aby

$$\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} + \gamma\boldsymbol{z} + \delta\boldsymbol{w} = \boldsymbol{o},$$

resp.

$$\alpha(1, 1, 2) + \beta(1, 0, 1) + \gamma(2, 1, 3) + \delta(2, 1, 2) = (0, 0, 0).$$

Po úpravách dostaneme homogenní soustavu (se zadanými vektory ve sloupci matice):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Tuto soustavu nemusíme řešit. Už před eliminací vidíme, že rovnic je méně než neznámých a protože soustava je homogenní, má nevyhnutelně nekonečně mnoho řešení. Existuje proto nenulové řešení a skupina vektorů $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}$ je lineárně závislá. Všimněme si, že tento fakt nezávisí nijak na konkrétním zadání vektorů. Libovolná skupina čtyř (nebo více) vektorů v prostoru $\mathbb{R}^3$ je lineárně závislá. Obecněji: v prostoru $\mathbb{R}^n$ je každá skupina obsahující více než n vektorů lineárně závislá.

1.1.1 Příklady

V $\mathbb{R}^3$ jsou dány vektory $\boldsymbol{a} = (1, 2, 3)$, $\boldsymbol{b} = (1, 0, -1)$, $\boldsymbol{c} = (-2, 2, 6)$, $\boldsymbol{d} = (1, 1, 3)$ a nulový vektor $\boldsymbol{o} = (0, 0, 0)$. Rozhodněte, zda jsou následující skupiny vektorů lineárně závislé nebo nezávislé. Vždy napište lineární kombinaci, které lineární (ne)závislost prokazuje.

1. $\boldsymbol{a}$,
2. $\boldsymbol{o}$,
3. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$,
4. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$,
5. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}$,
6. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{o}$,
7. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$,

Řešení:

1. Skupina obsahující pouze vektor $\boldsymbol{a}$ je lineárně nezávislá, protože pouze $0\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$.
2. Skupina obsahující pouze vektor $\boldsymbol{o}$ je lineárně závislá, protože např. $5\,\boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}$ a máme netriviální lin. kombinaci rovnou nulovému vektoru.
3. Skupina $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ je lineárně nezávislá, pouze $0\,\boldsymbol{a} + 0\,\boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$. Dva vektory jsou lineárně závislé, jestliže jeden je násobkem druhého. Vidíme hned, že $\boldsymbol{a}$ není násobkem $\boldsymbol{b}$. Pozor ale, takto jednoduše to funguje pouze pouze dva vektory.
4. Skupina $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ je lineárně závislá, protože $\boldsymbol{a} - 3\,\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} = \boldsymbol{o}$. Funguje libovolný násobek této rovnosti, např. $-2\,\boldsymbol{a} + 6\,\boldsymbol{b} + 2\,\boldsymbol{c} = \boldsymbol{o}$.
5. Skupina $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}$ je lineárně nezávislá, pouze $0\,\boldsymbol{a} + 0\,\boldsymbol{b} + 0\,\boldsymbol{d} = \boldsymbol{o}$.
6. Skupina $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{0}$ je lineárně závislá, protože např. $0\,\boldsymbol{a}+0\,\boldsymbol{b}+\boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}$. Každá skupina obsahující nulový vektor je lineárně závislá.
7. Skupina $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$, je lineárně závislá. 4 vektory jsou v prostoru $\mathbb{R}^3$ vždy lineárně závislé.

1.2 Skalární součin

Viděli jsme, že každý vektorový prostor je vybaven sčítáním vektorů a násobením vektorů skalárem. Pro některé aplikace to nemusí stačit. Chceme-li např. začít měřit (počítat) velikost vektoru, musíme do vektorového prostoru něco přidat: tzv. skalární součin. Se skalární součinem jste se patrně už setkali (stejně jako s aritmetickými vektory) v geometrii nebo ve fyzice. Pro aritmetické vektory nad $\mathbb{R}$ je definován jednoduše. Pro vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, kde $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, definujeme skalární součin těchto vektorů jako číslo, které označujeme $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ a které spočítáme

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

Tento skalární součin bývá nazýván také standardní skalární součin aritmetických vektorů. To proto, že jsou i jiné možnosti (jiné vzorce), jak se dá skalární součin aritmetických vektorů definovat. Existují také různé varianty značení skalárního součinu. Skalární součin aritmetických vektorů se zpravidla značí tak, jak jsme ho označili i my zde: $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$. Další rozšířenou variantou značení, na kterou byste případně mohli narazit, je $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$. Takto se často značí skalární součin na prostorech funkcí. To už ale přesahuje možnosti tohoto kurzu. Poznamenám jen, že skalární součin funkcí je zpravidla definován pomocí (určitého) integrálu (všechno souvisí se vším).

Pro vektory z prostoru $\mathbb{R}^4$ zadané jako $\boldsymbol{x} = (1, 2, 3, -1), \boldsymbol{y} = (10, 0, 3, 5)$ spočítáme skalární součin snadno jako $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 1 \cdot 10 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 + (-1) \cdot 5 = 10 + 0 + 9 - 5 = 14$. Mělo by vám to připomínat výpočty, které provádíme při maticovém součinu.

Skalární součin využijeme k definici velikosti vektoru. Napíšeme nejprve obecný tvar, kterým je definována velikost libovolných vektorů (máme-li k dispozici skalární součin). Velikost vektoru $\boldsymbol{x}$ z vektorového prostoru se skalárním součinem definujeme jako:

$$||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}}.$$

Velikost vektoru tedy definujeme jako odmocninu ze skalárního součinu vektoru sama se sebou. Takový skalární součin je vždy nezáporný, takže se dá odmocňovat a definice má smysl. Pro aritmetický vektor $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ můžeme skalární součin spočítat a dostaneme:

$$||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Velikost vektoru jsme označili dvojitou svislou čarou (jakoby dvojitou absolutní hodnotou). Můžete narazit také na název norma vektoru.

Konkrétně v $\mathbb{R}^2$ vypočteme pro $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ velikost tohoto vektoru jako

$$||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Pokud si umíte dvojrozměrné vektory aritmetické propojit s geometrií v rovině, vidíte, že to odpovídá měření velikosti, které v geometrii běžně používáme. Je to vlastně Pythagorova věta. Na rozdíl od geometrie nejsme v lineární algebře nijak omezováni dimenzí 3 a klidně v prostoru $\mathbb{R}^5$ spočítáme velikost pětirozměrného aritmetického vektoru $\boldsymbol{u} = (1, 3, 5, 0, 7)$ jako

$$||\boldsymbol{u}|| = \sqrt{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}} = \sqrt{1^2 + 3^2 + 5^2 + 0^2 + 7^2} = \sqrt{84}.$$

Kromě velikosti vektoru umožňuje skalární součin definovat také odchylku vektorů. Odchylkou dvou nenulových vektorů $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ z prostoru se skalárním součinem definujeme jako takové číslo $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$, pro které platí:

$$\cos \varphi = \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}}{||\boldsymbol{x}|| \cdot ||\boldsymbol{y}||}.$$

Máme-li na prostoru $\mathbb{R}^4$ spočítat odchylku vektorů $\boldsymbol{a} = (1, 0, 0, 0)$ a $\boldsymbol{b} = (1, 1, 1, 1)$, spočítáme si nejdřív velikosti těchto vektorů a jejich skalární součin:

$$||\boldsymbol{a}|| = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}} = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2} = 1,$$

$$||\boldsymbol{b}|| = \sqrt{\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b}} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} = 2,$$

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 1 + 0 + 0 + 0 = 1.$$

Pro odchylku φ vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ pak podle naší definice platí

$$\cos \varphi = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{||\boldsymbol{a}|| \cdot ||\boldsymbol{b}||} = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

a hledaná odchylka je $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

Uvedené vztahy pro velikost a odchylku možná znáte z analytické geometrie. Jakkoliv to spolu samozřejmě souvisí, zde se na geometrický názor nijak neodvoláváme a uvedené vztahy jsou prostě definice velikosti a odchylky pro aritmetické vektory.

Nejdůležitější případ je, když odchylka vektorů rovná se $\frac{\pi}{2}$. Takové vektory nazýváme kolmé nebo ortogonální. Protože $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ a zlomek je roven nule, když je čitatel roven nule, jsou vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ kolmé (ortogonální), právě když je jejich skalární součin roven nule: $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 0$.

Zjistíme, zda jsou některé vektory (z $\mathbb{R}^3$) ze skupiny $\boldsymbol{a} = (1,1,1), \boldsymbol{b} = (1,-1,0), \boldsymbol{c} = (1,1,-2)$ kolmé. K tomu stačí spočítat jejich vzájemné skalární součiny a zjistit, zda se rovnají nule. Protože $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$, jsou vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ kolmé. Protože $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} = 0$, jsou vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{c}$ kolmé. Protože $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = 0$, jsou také vektory $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$ kolmé.

Dva vektory se nazývají rovnoběžné, jestliže jsou lineárně závislé, neboli jeden je násobkem druhého. Vektor $\boldsymbol{x}$ je rovnoběžný s vektorem $\boldsymbol{y}$, jestliže existuje skalár α takový, že $\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{y}$. Pokud je toto číslo kladné, říkáme, že vektory mají stejný směr. Při práci s vektory je mnohdy výhodné pracovat s vektory, které mají velikost jedna. Takové vektory se nazývají jednotkové. Často proto potřebujeme nahradit vektor, označme ho třeba $\boldsymbol{x}$, vektorem, který je s původním vektorem $\boldsymbol{x}$ rovnoběžný, má stejný směr a jeho velikost je jedna – označme ho $\boldsymbol{x_0}$. Potřebujeme tedy najít takové číslo α, aby platilo zároveň $\boldsymbol{x_0} = \alpha\boldsymbol{x}$ a $||\boldsymbol{x_0}|| = 1$. Snadno se ověří, že hledaná konstanta je převrácená hodnota velikosti původního vektoru:

$$\boldsymbol{x_0} = \frac{1}{||\boldsymbol{x}||}\boldsymbol{x}.$$

Mějme vektor $\boldsymbol{a} = (1,0,0,1)$ v prostoru $\mathbb{R}^4$. Chceme-li najít jednotkový vektor $\boldsymbol{a_0}$, který je s $\boldsymbol{a}$ rovnoběžný a má stejný směr, spočítáme si nejprve velikost vektoru $\boldsymbol{a}$:

$$||\boldsymbol{a}|| = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}} = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Pro hledaný vektor $\boldsymbol{a_0}$ pak dostáváme:

$$\boldsymbol{a_0} = \frac{1}{||\boldsymbol{a}||}\boldsymbol{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Pro kontrolu vypočítáme

$$||\boldsymbol{a_0}|| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0^2 + 0^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} + 0 + 0 + \frac{1}{2}\right)} = \sqrt{1} = 1.$$

Zatímco při eliminační metodě matic jsme se snažili vyhýbat zlomkům a "ošklivým číslům", zde je situace do jisté míry opačná a za "hezký"považujeme bez ohledu na výskyty $\sqrt{2}$ vektor $\boldsymbol{a_0}$.

1.2.1 Příklady

Jou dány vektory z prostoru $\mathbb{R}^4$: $\boldsymbol{a} = (1,2,0,-1), \boldsymbol{b} = (2,1,2,4), \boldsymbol{c} = (0,0,\frac{1}{2},0)$.

1. Spočítejte velikosti vektorů $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$.
2. Nalezněte jednotkové vektory ve směru těchto vektorů.
3. Spočítejte odchylky vektorů $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$.

Řešení:

1. $||\boldsymbol{a}|| = \sqrt{6}, ||\boldsymbol{b}|| = 5, ||\boldsymbol{c}|| = \dfrac{1}{2}$.
2. $\boldsymbol{a_0} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,2,0,-1), \boldsymbol{b_0} = \dfrac{1}{5}(2,1,2,4), \boldsymbol{c_0} = (0,0,1,0)$.
3. Dvojice $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}$ jsou kolmé. Odchylka $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ je $\arccos \dfrac{2}{5}$.

1.3 Soustavy lineárních rovnic

Poté, co jsme se seznámili se základními vlastnostmi aritmetických vektorů, můžeme lépe formulovat některé věci týkající se soustav lineárních rovnic. Začneme definicí soustavy lineárních algebraických rovnic.

Definice 3 *Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice typu $m \times n$ reálných čísel, $\boldsymbol{x}$ je jednosloupcová matice typu $n \times 1$ (sloupcový vektor) symbolů (tzv. neznámých)* $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ *a $\boldsymbol{b}$ je jednosloupcová matice typu $m \times 1$ (sloupcový vektor) reálných čísel* $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$. *Maticovou rovnost $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ nazýváme soustavou m lineárních algebraických rovnic pro n neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n$.*

Matice $\mathbf{A}$ z předchozí definice se nazývá matice soustavy. Matice $[\mathbf{A} \,|\, \boldsymbol{b}]$, která vznikne tak, že k matici soustavy $\mathbf{A}$ připíšeme za čáru sloupec $\boldsymbol{b}$, se nazývá rozšířená matice soustavy. Je to matice, na které provádíme Gaussovu eliminaci. Sloupcový vektor $\boldsymbol{b}$ nazýváme sloupec (nebo vektor) pravých stran. Sloupcový vektor $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ se nazývá řešení soustavy $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, jestliže platí $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}$. Je to formální zápis běžně známého faktu, že řešení soustavy rovnic jsou taková čísla, která když dosadíme za neznámé, dostaneme platnou (číselnou) rovnost.

Tato formální definice soustavy lineárních algebraických rovnic nám dává další možnost, jak tyto soustavy zapisovat. Kromě rovnic a rozšířené matice soustavy (pro eliminační metodu):

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ x + 2y - z &= 2 \\ 2x + 3y + 3z &= 17 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 17 \end{array}\right],$$

můžeme tuto soustavu zapisovat také ve tvaru $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 17 \end{bmatrix},$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

je matice soustavy a

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 17 \end{bmatrix}$$

je sloupec pravých stran. Ověřte, že spočítáte-li maticový součin ("řádek krát sloupec") $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x}$ a porovnáte jednotlivé prvky vlevo a vpravo, dostanete právě tři rovnice naší soustavy.

Interpretace neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jako složek vektoru neznámých

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

a využití našich poznatků o aritmetických vektorech může přispět k zpřehlednění zápisu (zejména situace s nekonečně mnoha řešeními a více parametry může působit nepřehledně) a k lepšímu pochopení struktury řešení soustav. Další postup předvedeme na příkladech. Soustavu rovnic nejprve vyřešíme obvyklým způsobem, získané řešení pak přepíšeme do vektorového tvaru. Protože struktura množiny řešení homogenních a nehomogenních soustav se liší, budeme zabývat nejprve homogenními soustavami.

1.3.1 Homogenní soustavy

Vyřešme homogenní soustavu rovnic dvou rovnic pro čtyři neznámé a, b, c, d (už je v odstupňovaném tvaru, nemusíme eliminovat):

$$\begin{aligned} a + b + c + 2d &= 0 \\ b - c &= 0 \end{aligned}$$

Soustavu vyřešíme tak, jak jsme se naučili v kapitole o řešení soustav. Postupujeme odspoda, z každé rovnice vypočteme jednu neznámou, ostatní neznámé můžeme zvolit libovolně. V poslední rovnici jsou neznámé b a c. Neznámou c zvolíme jako parametr $c = t, t \in \mathbb{R}$ a b z rovnice dopočítáme $b = t$. Posuneme se do první rovnice, dvě neznámé zbývají, jednu z nich zvolíme: $d = s, s \in \mathbb{R}$ a dopočítáme $a = -2t - 2s$. Sepíšeme řešení:

$$\begin{aligned} a &= -2t - 2s \\ b &= t \\ c &= t \\ d &= s \\ s, t &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Pod tímto popisem množiny všech řešení naší soustavy (kterých je nekonečně mnoho) může být těžké si něco představit. Přepíšeme toto řešení tak, že neznámé a, b, c, d budou tvořit čtyři složky vektoru neznámých $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4$:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}.$$

Dosadíme naše řešení a budeme upravovat:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2t - 2s \\ t \\ t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2t \\ t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2s \\ 0 \\ 0 \\ s \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Sloupec řešení jsme nejprve napsali jako součet dvou vektorů. Každý z nich obsahuje jen jeden parametr, první t a druhý s. Parametry reprezentují čísla, dají se tedy z vektoru (resp. z matice) vytknout. To byla úprava v posledním kroku. Nyní můžeme lépe popsat a pochopit strukturu řešení naší soustavy. Vidíme totiž, že každé řešení je lineární kombinací dvou vektorů, označme je $\boldsymbol{x_1}$ a $\boldsymbol{x_2}$:

$$\boldsymbol{x_1} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x_2} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Můžeme psát $\boldsymbol{x} = t\,\boldsymbol{x_1} + s\,\boldsymbol{x_2}, t, s \in \mathbb{R}$. Konkrétní řešení dostáváme tak, že za parametry s a t dosadíme nějaká konkrétní čísla. Zvolíme libovolně například $t = -1$ a $s = 2$ a dostaneme jedno (vybrané z nekonečně mnoha) řešení $\boldsymbol{x_0}$:

$$\boldsymbol{x_0} = (-1)\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Chcete-li po složkách: $a = -2$, $b = -1$, $c = -1$ a $d = 2$. Další konkrétní řešení jsou evidentně také $\boldsymbol{x_1}$ a $\boldsymbol{x_2}$, které dostaneme volbou $t = 1, s = 0$ a $t = 0, s = 1$.

Pro pochopení struktury řešení této soustavy je důležité to, že se jedná o všechny lineární kombinace dvou lineárně nezávislých vektorů. Ačkoliv je řešení nekonečně mnoho, stačí si zapamatovat tyto dva a všech nekonečně mnoho dalších už z nich vyrobíme lineární kombinací. Říkáme také, že množina (prostor) řešení této homogenní soustavy má dimenzi dva (máme kombinaci dvou vektorů). Za povšimnutí také stojí to, že počet vektorů v lineární kombinaci je určen počtem parametrů v řešení. Víme přitom, že počet parametrů je počet neznámých minus počet rovnic. V naší soustavě bylo tedy od počátku jasné, že řešení bude mít dimenzi dva.

Vyřešíme ještě jednu homogenní soustavu, budeme už postupovat stručněji. Vezmeme si pět neznámých a, b, c, d, e a opět půjde o odstupňovaný tvar bez nutnosti další eliminace:

$$\begin{aligned} a + b + 3c - d + e &= 0 \\ b + 2e &= 0 \end{aligned}$$

Máme dvě rovnice pro pět neznámých, budeme potřebovat tři parametry. Množina řešení bude tvořena lineárními kombinacemi třech lineárně nezávislých vektorů. Bude mít dimenzi tři. Při řešení opět postupujeme odspoda: zvolíme $e = t, t \in \mathbb{R}$ a dopočítáme $b = -2t$. V první rovnici zbývají tři neznámé, dvě zvolíme: $d = r, r \in \mathbb{R}$ a $c = s, s \in \mathbb{R}$ a poslední dopočítáme $a = t - 3s + r$. řešení rovnou zapíšeme jako vektor a upravíme stejně, jako v předchozí soustavě:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t - 3s + r \\ -2t \\ s \\ r \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -2t \\ 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3s \\ 0 \\ s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \\ r \\ 0 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Řešení vyšlo ve tvaru, který jsme očekávali. Jedná se o všechny lineární kombinace tří lineárně nezávislých vektorů. Každý z těchto vektorů přitom sám o sobě reprezentuje jedno konkrétní řešení. První vektor nám říká $a = 1, b = -2, c = 0, d = 0, e = 1$. Můžeme provést zkoušku a dosadit do zadaných rovnic. Funguje.

Výsledky předchozích řešení lze zformulovat obecně. Ke každé homogenní soustavě k lineárních algebraických rovnic pro n neznámých ($k \leq n$) v odstupňovaném tvaru existuje právě $n - k$ lineárně nezávislých vektorů řešení a množina všech řešení této soustavy je tvořena právě všemi lineárními kombinacemi těchto vektorů. Říkáme, že řešení má dimenzi $n - k$.

Poznamenejme, že pokud postupujeme jako ve výše uvedených příkladech, dostaneme těchto $n - k$ vektorů, které vyjdou vždy lineárně nezávislé. Tyto vektory nejsou dány jednoznačně, záleží na konkrétním postupu řešení. Množina všech řešení soustavy daná jejich lineárními kombinacemi musí být ale vždy stejná – množina všech řešení je jenom jedna, dá se ale popsat různými způsoby.

1.3.2 Nehomogenní soustavy

Jak ukážeme na příkladech, struktura nehomogenní soustavy je jiná (než u soustav homogenních). Vyřešíme (nehomogenní) soustavu

$$\begin{aligned} a + b + c + 2d &= 5 \\ b - c &= 0 \end{aligned}$$

Soustava už je v odstupňovaném tvaru, nemusíme eliminovat a můžeme rovnou psát výsledek. Neznámou c zvolíme jako parametr $c = t, t \in \mathbb{R}$ a b z rovnice dopočítáme $b = t$. Posuneme se do první rovnice, dvě neznámé zbývají, jednu z nich zvolíme: $d = s, s \in \mathbb{R}$ a dopočítáme $a = 5 - 2t - 2s$. Sepíšeme řešení:

$$\begin{aligned} a &= 5 - 2t - 2s \\ b &= t \\ c &= t \\ d &= s \\ s, t &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Neznámé a, b, c, d budou opět tvořit čtyři složky vektoru neznámých $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4$:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 - 2t - 2s \\ t \\ t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2t \\ t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2s \\ 0 \\ 0 \\ s \end{bmatrix} = \color{red}{\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \color{blue}{+ t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}.$$

Porovnejme toto řešení s řešením první homogenní soustavy, kterou jsme spočetli v předchozí kapitole. Tato soustava má totiž stejnou matici soustavy: levé části rovnic jsou stejné. Změnili jsme pouze pravou stranu, aby z homogenní soustavy vznikla nehomogenní. Porovnáme-li obě řešení, vidíme, že jsou velmi podobné. Podstatný rozdíl je ale v tom, že zatímco řešení homogenní soustavy je tvořeno všemi lineárními kombinacemi vektorů, u nehomogenní soustavy se objevuje jeden vektor, který se žádným parametrem nenásobí (červený). Tento vektor je samozřejmě také jedním vybraným řešením naší soustavy. Toto řešení získáme tak, že všechny parametry položíme rovny nule. Každé jedno řešení nehomogenní soustavy se nazývá partikulární řešení. Naopak ostatní vektory, které se v řešení nehomogenní soustavy objevují (ty s parametry, označeny modře), jsou stejné jako v případě původní homogenní soustavy. Homogenní soustava, která vznikne z nehomogenní soustavy tak, že původní (nenulovou) pravou stranu nahradíme nulami, se nazývá přidružená homogenní soustava. Vidíme tedy, že řešení nehomogenní soustavy získáme tak, že sečteme všechna řešení přidružené homogenní soustavy (modrá lineární kombinace) s jedním partikulárním řešením (červený vektor).

Vyřešme ještě jednu soustavu:

$$\begin{aligned} a + b + 3c - d + e &= 3 \\ b + 2e &= 1 \end{aligned}$$

Přidruženou homogenní soustavu (stejné levé strany, na pravé straně nuly) jsme také již vyřešili v předchozí kapitole, porovnejte si výsledky. Máme dvě rovnice pro pět neznámých, budeme potřebovat tři parametry. Při řešení opět postupujeme odspoda: zvolíme $e = t, t \in \mathbb{R}$ a dopočítáme $b = 1 - 2t$. V první rovnici zbývají tři neznámé, dvě zvolíme: $d = r, r \in \mathbb{R}$ a $c = s, s \in \mathbb{R}$ a poslední dopočítáme $a = 3 - b - 3c + d - e = 2 + t - 3s + r$. řešení rovnou zapíšeme jako vektor a upravíme stejně, jako v předchozí soustavě:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+t-3s+r \\ 1-2t \\ s \\ r \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A vidíme, že opět máme ve výsledku jeden (červený) vektor bez parametru reprezentující partikulární řešení. Můžeme ověřit, že toto opravdu je řešení, provést zkoušku a dosadit do rovnic $a = 2, b = 1, c = 0, d = 0, e = 0$. Naopak kombinace modrých vektorů je řešení přidružené homogenní soustavy (porovnejte s výsledkem v předchozí kapitole). Opravdu, když dosadíme např. první modrý vektor do rovnic $(a = 1, b = -2, c = 0, d = 0, e = 1)$, nevyjdou naše pravé strany ale nuly. Modré vektory totiž naší soustavu neřeší. Řeší přidruženou homogenní soustavu. K libovolné kombinaci modrých vektorů je nutné přičíst partikulární řešení (červený vektor). Teprve tak dostaneme řešení naší soustavy.

1.3.3 Řešitelnost soustav

V kapitole o řešení soustav jsme se již zabývali řešitelností soustav a viděli jsme, že soustava nemá řešení, jetliže během eliminace potkáme řádek $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & \dots & 0 & c \end{array}\right]$, kde $c \neq 0$. Tento fakt nyní zformulujeme ještě jiným způsobem. Nejprve ale zavedeme jeden pojem týkající se matic a tím je hodnost matice. Jestliže $\mathbf{A}$ je libovolná matice, jako její hodnost označujeme číslo $h(\mathbf{A})$, které udává počet jejích lineárně nezávislých řádků (každý řádek bereme jako aritmetický vektor). Hodnost matice se zjišťuje Gaussovou eliminací. Elementární úpravy hodnost matice nemění a jakmile je matice v odstupňovaném tvaru, určíme hodnost jako počet nenulových řádků.

Spočítáme hodnost matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Provedeme Gaussovu eliminaci

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 0 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a vidíme, že v odstupňovaném tvaru zůstaly v matici dva (nenulové) řádky. Výsledek proto je $h(\mathbf{A}) = 2$.

Připomeňme, že máme-li soustavu $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, matice $\mathbf{A}$ se nazývá matice soustavy a matice $[\mathbf{A} \,|\, \boldsymbol{b}]$ je tzv. rozšířená matice soustavy. Rozšířená matice soustavy může vypadat třeba takto:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

Jedná se o soustavu, která nemá řešení. To vidíme z posledního řádku $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & \dots & 0 & 2 \end{array}\right]$. To také znamená, že zatímco rozšířená matice této soustavy má hodnost $h([\mathbf{A} \,|\, \boldsymbol{b}]) = 3$, protože celá čtyřsloupečková matice neobsahuje nulový řádek, matice soustavy $\mathbf{A}$ má hodnost $h(\mathbf{A}) = 2$. V části před čarou totiž nulový řádek je. Naopak u soustav, které mají řešení, jsou obě hodnosti vždy stejné. Platí proto důležitá tzv. Frobeniova věta: soustava lineárních algebraických rovnic $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ má řešení, právě když $h([\mathbf{A} \,|\, \boldsymbol{b}]) = h(\mathbf{A})$.

1.3.4 Příklady

1. Přepište řešení všech soustav z textu o soustavách a eliminaci do podoby lineární kombinace vektorů.

2. Nalezněte všechny vektory z $\mathbb{R}^4$ kolmé současně na $\boldsymbol{a} = (1, 0, 0, 1)$ a na $\boldsymbol{b} = (1, 1, 1, -1)$.

Řešení: Hledáme vektory $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ kolmé na $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$. Kolmost znamená $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} = 0$ a $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{x} = 0$. Po dosazení $(1, 0, 0, 1) \cdot (x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ a $(1, 1, 1, -1) \cdot (x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$. Když vypočítáme skalární součiny, vyjde $x_1 + x_4 = 0$ a $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0$ a dostáváme homogenní soustavu dvou rovnic pro čtyři neznámé složky hledaných vektorů. Jejím řešením dostaneme:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ 2t - r \\ r \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} .$$