1 Vlastní čísla a vlastní vektory matic

1.1 Komplexní čísla

Než se začneme zabývat vlastními čísly, musíme se podívat na tzv. komplexní čísla. Komplexní čísla dříve patřila k obvyklé středoškolské látce, ale těžko říct, kdo z vás se s nimi už setkal. Nepůjde o žádnou ucelenou teorii komplexních čísel, ale pouze o minimum nutné k tomu, abychom dokázali vyřešit kvadratickou rovnici se záporným diskriminantem. Problém je v tom, že diskriminant musíme odmocnit a je dobře známo, že odmocňovat záporná čísla v $\mathbb{R}$ nejde. My bychom ale přesto potřebovali najít např. nějaké řešení rovnice $x^2+1=0$ neboli $x^2=-1$. Protože každé reálné číslo umocněné na druhou je nezáporné, je zřejmé, že řešení této rovnice nebude reálné číslo. Nebude ležet na tzv. reálné číselné ose. Zavedeme nové číslo, které označíme i. (Nemůžeme ho označit pomocí číslic, protože tak by vzniklo reálné číslo – zjednodušeně řečeno). Toto nové číslo i není reálné číslo a jeho určující vlastností je $i^2=-1$. Pomocí tohoto čísla i můžeme zavést celou množinu nových čísel, které budeme říkat komplexní čísla a značit $\mathbb{C}$. Tato množina tvoří tzv. těleso, což znamená, že pro počítání v něm platí řada stejných vlastností jako má těleso reálných čísel.

Komplexní čísla zapisujeme jako $a+bi$ (tzv. algebraický tvar), kde a a b jsou reálná čísla. Konkrétně např. $7-2i$ nebo $-1+\sqrt{2}i$. Číslo a se nazývá reálná část komplexního čísla, b je tzv. imaginární část. Každé komplexní číslo je tak vlastně reprezentováno dvojicí reálných čísel. Reálná čísla si můžeme představovat jako podmnožinu komplexních čísel: jsou to taková čísla, která mají nulovou imaginární část: $2=2+0i$. Základní aritmetika komplexních čísel je podobná počítání s polynomy st. 1, místo proměnné x máme číslo i. Rovnost komplexních čísel znamená rovnost reálných částí a rovnost imaginárních částí. Sčítání a odčítání definujeme po složkách: $(a+bi)\pm(c+di)=(a+c)\pm(b+d)i$. Dá se říci, že počítáme naprosto přirozeně: $(2+i)+(3+3i)=5+4i$. Závorky v takovém zápisu jsou zbytečné. Uveďme pro příklad několik takových výpočtů: $i+i=2i$, $(5+i)-(1+i)=4$, $0i=0$ nebo $3(2-5i)=6-15i$. Poslední rovnost by se dala nazvat násobení skalárem (reálným číslem). Počítání s komplexními čísly je podobné také jako počítání s dvojsložkovými aritmetickými vektory. Komplexní čísla ale můžeme také násobit, zatímco vektory nenásobíme (skalární součin "se nepočítá", není to klasická operace typu vektor krát vektor rovná se vektor). Násobení komplexních čísel si můžeme představit jako roznásobování závorky. Máme-li vynásobit $(1+i)$ a $(2+3i)$ roznásobíme

$$(1+i)\cdot(2+3i)=1\cdot 2+1\cdot 3i+i\cdot 2+i\cdot 3i=2+3i+2i+3i^2=2+5i+3i^2.$$

To ještě není celý výsledek, protože víme, že $i^2=-1$. Takže můžeme ještě pokračovat

$$(1+i)\cdot(2+3i)=2+5i+3i^2=\cdots=2+5i-3=-1+5i.$$

Nyní se vrátíme k naší rovnici $x^2=-1$. Je evidentní, že $x=i$ je její řešení. Protože $(-i)^2=((-1)i)^2=(-1)^2\cdot i^2=i^2=-1$, je druhé řešení rovnice $x=-i$. Obě tato čísla budeme nazývat (druhé) odmocniny z minus jedné a zapisovat: $\sqrt{-1}=i$ a také $\sqrt{-1}=-i$. Pro tento nový význam symbolu $\sqrt{\ }$ platí běžné vztahy, na které jsme zvyklí při počítání s odmocninami. Nezaměňujme ale jeho význam s reálnou funkcí $y=\sqrt{x}$. Její definiční obor i obor hodnot zůstávají $\langle 0,+\infty)$.

Když potřebujeme vyřešit kvadratickou rovnici $x^2+4x+5=0$, použijeme vzorec s diskriminantem a dostaneme

$$x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16-20}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{4}\sqrt{-1}}{2}=-2\pm\sqrt{-1}.$$

Nyní ale neopouštíme řešení této úlohy s tím, že nemá řešení, ale použijeme $\sqrt{-1}=i$. Je jedno, zda vybereme i nebo $-i$, protože před odmocninou je tak jako tak $\pm$. Dostáváme řešení rovnice $x_{1,2}=-2\pm i$. Zkouškou ověříme, že opravdu $(-2+i)^2+4(-2+i)+5=0$. Všimněme si, že dva kořeny rovnice $2+i$ a $2-i$ se liší pouze znaménkem u imaginární části. Tak to bude u rovnic s reálnými koeficienty vždy, protože číslo i se do řešení dostane odmocninou ze záporného diskriminantu, přičemž ve vzorci pro řešení máme $\pm\sqrt{D}$. Tento jev je poměrně důležitý a čísla $a+bi$ a $a-bi$ se nazývají komplexně sdružená. Kořeny kvadratické rovnice s reálnými koeficienty a záporným diskriminantem jsou tedy vždy komplexně sdružené. Pro součin komplexně sdružených čísel platí, že výsledek je reálný:

$$(a+bi)(a-bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2.$$

Toho můžeme využít při dělení komplexním číslem. Dělení znázorníme zlomkem a spočítáme např. $\dfrac{4}{1+i}$. Dělit přitom znamená nalézt algebraický tvar výsledku neboli zbavit se i ve jmenovateli. Toho dosáhneme tak, že zlomek rozšíříme číslem komplexně sdruženým ke jmenovateli (v našem příkladu $1-i$), tím se jmenovatel stane reálným:

$$\frac{4}{1+i} = \frac{4(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{4-4i}{2} = 2-2i.$$

1.2 Vlastní čísla a vlastní vektory

Buď $\mathbf{A}$ čtvercová matice typu $(n \times n)$ a $\boldsymbol{x}$ n-rozměrný sloupcový aritmetický vektor, který můžeme interpretovat jako matici $n \times 1$ a díky tomuto rozměru je definován maticový součin $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x}$. Výsledkem toho součinu bude opět matice $n \times 1$ neboli sloupcový vektor, označme ho třeba $\boldsymbol{y}$. Platí tedy

$$\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}.$$

Označení vektorů $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ není zvoleno úplně náhodou a má připomínat značení obvyklé u funkcí. Na tento součin lze pohlížet jako na zobrazení, kdy vektoru $\boldsymbol{x}$ pomocí součinu s maticí $\mathbf{A}$ přiřazujeme vektor $\boldsymbol{y}$. Nás bude zajímat, za jakých podmínek bude pro zadanou matici $\mathbf{A}$ vektor $\boldsymbol{x}$ rovnoběžný s vektorem $\boldsymbol{y}$. Dva vektory jsou rovnoběžné, když je jeden násobkem druhého, neboli existuje číslo (reálné nebo případně i komplexní) λ takové, že $\boldsymbol{y} = \lambda \cdot \boldsymbol{x}$. Pro zvolenou matici $\mathbf{A}$ tedy hledáme takový vektor x a takové číslo λ, aby platilo

$$\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x} = \lambda \cdot \boldsymbol{x}.$$

Hledáme vektory $\boldsymbol{x}$, pro které je součin s maticí $\mathbf{A}$ stejný jako součin se skalárem λ. Naším úkolem je k zadané matici $\mathbf{A}$ najít čísla λ a vektory $\boldsymbol{x}$ tak, aby platila požadovaná rovnost. V úloze jsou vlastně dva druhy neznámých: na začátku neznáme ani skaláry λ ani vektory $\boldsymbol{x}$. Úlohu začneme řešit tak, že $\lambda \cdot \boldsymbol{x}$ odečteme a tím převedeme na druhou stranu:

$$\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x} - \lambda \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}.$$

V obou členech nalevo je $\boldsymbol{x}$, abychom ale mohli vytknout, potřebujeme, aby šlo o součin matic stejného typu. Dosadíme proto $\boldsymbol{x} = \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{x}$, kde $\mathbf{E}$ je jednotková matice typu $n \times n$. Dostáváme

$$\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x} - \lambda \cdot \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$$

a můžeme vytknout $\boldsymbol{x}$:

$$(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{E}) \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}.$$

Jedná se vlastně o homogenní soustavu s maticí soustavy $\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{E}$. Tato matice soustavy je čtvercová. Protože nás zajímá nenulové řešení (vektor $\boldsymbol{o}$ řeší naší úlohu automaticky), potřebujeme, aby po eliminaci bylo v soustavě méně rovnic než neznámých – v matici musí vzniknout nulový řádek. Potřebujeme tedy, aby matice soustavy $\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{E}$ byla singulární. Takové matice mají nulový determinant. Naše úloha má nenulové řešení (co se týče vektoru $\boldsymbol{x}$), právě když

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{E}) = 0.$$

Zde se vyskytuje pouze neznámá λ a je to vlastně rovnice, ze které můžeme λ vypočítat. Tato rovnice se nazývá charakteristická rovnice matice $\mathbf{A}$. Po vyřešení této rovnice máme hledané hodnoty skaláru λ a můžeme pro tyto hodnoty (pro každou zvlášť, je-li jich více) vyřešit soustavu

$$(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{E}) \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$$

a najít tak i příslušné vektory $\boldsymbol{x}$.

Ačkoliv to tak možná nevypadá a v tomto úvodním kurzu se k žádným aplikacím těchto výsledků nedostaneme, čísla λ a příslušné vektory $\boldsymbol{x}$ se při práci s maticí $\mathbf{A}$ používají velmi často a je to velmi důležitá látka pro počítání s maticemi. Protože čísla λ hledáme jako kořeny charakteristické rovnice, může se stát, že půjde o komplexní čísla (záporný diskriminant). Tato úloha se proto zpravidla formuluje na tělese $\mathbb{C}$.

Definice 1 *Nechť $\boldsymbol{A}$ je (reálná nebo i komplexní) čtvercová matice $n \times n$. Komplexní číslo λ se nazývá vlastní číslo matice $\boldsymbol{A}$, pokud existuje nenulový aritmetický vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ takový, že platí*

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \lambda \cdot \boldsymbol{x}.$$

Pro vlastní číslo λ pak definujeme vlastní vektor matice $\boldsymbol{A}$ příslušný k vlastnímu číslu λ jako každý vektor $\boldsymbol{x}$ (i nulový), pro který platí uvedená rovnost $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \lambda \cdot \boldsymbol{x}$.

Vlastní čísla a vlastní vektory jsme definovali i pro komplexní matice. My budeme vždy pracovat s maticemi reálnými. I reálná matice ale může mít komplexní vlastní čísla, proto se použití tělesa $\mathbb{C}$ nedá v této úloze obecně vyhnout. Návod na výpočet už jsme přitom uvedli. Nejprve řešíme charakteristickou rovnici

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{E}) = 0 \tag{1}$$

a nalezneme vlastní čísla. Pro každé vlastní číslo zvlášť pak hledáme vlastní vektory jako řešení soustavy

$$(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{E}) \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}. \tag{2}$$

Pokud počítáte dobře, musí mít tato soustava vždy nenulové řešení, řešení bude tedy pokaždé nekonečně mnoho. Pokud vám vyjde jako řešení pouze nulový vektor, máte buď špatně určené vlastní číslo nebo máte chybu v soustavě.

Hledáme vlastní čísla a vlastní vektory matice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$. Začínáme charakteristickou rovnicí (1):

$$0 = \det(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{E}) = \det\left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 2 & 2-\lambda \end{bmatrix}.$$

V charakteristické rovnici odečítáme od zadané matice vždy λ-násobek jednotkové matice, což se pokaždé projeví jako odečtení λ od prvků na hlavní diagonále tak, jak nám to vyšlo i nyní. Když spočítáme křížovým pravidlem determinant, dostaneme

$$0 = (3-\lambda)(2-\lambda) - 2$$

a po roznásobení a sečtení

$$0 = 4 - 5\lambda + \lambda^2.$$

Vidíme, že charakteristická rovnice je algebraická (polynomiální) rovnice pro neznámou λ. Nejvyšší mocninu λ dostaneme vynásobením prvků na hlavní diagonále, které všechny obsahují první mocninu λ. Charakteristická rovnice matice typu $n \times n$ je tedy stupně n. V našem případě je to rovnice stupně 2 neboli kvadratická rovnice, kterou snadno vyřešíme. Kořeny naší charakteristické rovnice a hledaná vlastní čísla naší matice $\mathbf{A}$ jsou $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = 4$. Když máme vlastní čísla, jdeme pro každé z nich hledat vlastní vektory jako řešení soustavy (2).

Pro $\lambda_1 = 1$ dostaneme matici soustavy

$$\mathbf{A} - \lambda_1 \cdot \mathbf{E} = \mathbf{A} - 1 \cdot \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

a vlastní vektory nalezneme jako řešení soustavy $(\mathbf{A} - \lambda_1 \cdot \mathbf{E}) \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vidíme, že matice soustavy má oba řádky stejné, v eliminaci by jeden vypadl a v soustavě zůstává jediná rovnice $2x + y = 0$. To je v pořádku, soustava musí mít nekonečně mnoho řešení, takže vždy alespoň jeden řádek musí z matice soustavy při eliminaci vypadnout. Zvolíme $x = t, t \in \mathbb{R}$ (pokud máme reálnou matici a reálná vlastní čísla, budeme řešit pouze v $\mathbb{R}$) a dopočítáme $y = -2t$. Dostali jsme tak řešení (a vlastní vektory příslušné k vlastnímu číslu $\lambda_1 = 1$), které označíme $\boldsymbol{x_1}$, protože budeme hledat ještě druhý vlastní vektor pro druhé vlastní číslo:

$$\boldsymbol{x_1} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -2t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Vlastních vektorů příslušných k danému vlastnímu číslu je vždy nekonečně mnoho. Často se však uvádí pouze vhodní reprezentanti: tolik lineárně nezávislých vektorů, kolik je dimenze řešení vzniklé homogenní soustavy. V našem případě je dimenze řešení 1 (v lineární kombinaci figuruje jediný vektor), zvolíme např. $t = 1$ a dostaneme vlastní vektor

$$\boldsymbol{x_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Jako zkoušku můžeme nalezený vlastní vektor vynásobit maticí $\mathbf{A}$ a dostaneme:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Vidíme, že to vychází tak, jak má. Dle definice vlastních vektorů a vlastních čísel má pro vlastní vektor $\boldsymbol{x_1}$ příslušný vlastnímu číslu $\lambda_1 = 1$ platit $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x_1} = \lambda_1 \cdot \boldsymbol{x_1} = 1 \cdot \boldsymbol{x_1}$. Součin matice s vlastním vektorem musí být stejný jako součin vlastního čísla s vlastním vektorem.

Stejný postup musíme zopakovat pro druhé vlastní číslo $\lambda_2 = 4$. Dostaneme matici soustavy

$$\mathbf{A} - \lambda_2 \cdot \mathbf{E} = \mathbf{A} - 4 \cdot \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

a vlastní vektory nalezneme jako řešení soustavy $(\mathbf{A} - \lambda_2 \cdot \mathbf{E}) \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Soustava bude mít nekonečně mnoho řešení, jeden řádek matice soustavy je násobkem druhého řádku. Řešíme soustavu o jediné rovnici $-x + y = 0$, řešení bude $x = y = r, r \in \mathbb{R}$. Vlastní vektor příslušný k $\lambda_2 = 4$ bude

$$\boldsymbol{x_2} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ r \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vhodný reprezentant pro druhý vlastní vektor bude třeba

$$\boldsymbol{x_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Jako zkoušku opět vynásobíme vlastní vektor maticí $\mathbf{A}$ a dostaneme:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Funguje: matice krát vlastní vektor rovná se vlastní číslo krát vlastní vektor.

K zadané matici $\mathbf{A}$ jsme nalezli dvě vlastní čísla $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = 4$. Pro číslo $\lambda_1 = 1$ jsme našli příslušný vlastní vektor $\boldsymbol{x_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Vlastním vektorem je přitom také každý jeho násobek. Pro číslo $\lambda_2 = 4$ jsme našli příslušný vlastní vektor $\boldsymbol{x_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Vlastním vektorem je přitom opět také každý jeho násobek.

Hledáme vlastní čísla a vlastní vektory matice $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. Budeme už postupovat stručněji. Začneme (jako vždy) charakteristickou rovnicí

$$0 = \det(\mathbf{B} - \lambda \cdot \mathbf{E}) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ 4 & 2 & 2-\lambda \end{bmatrix}.$$

Determinant 3×3 spočítáme Sarrusovým pravidlem a dostaneme

$$0 = (2-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda) + 4 + 4 - [4(1-\lambda) + 2(2-\lambda) + 2(2-\lambda)].$$

Po roznásobení a sečtení dostaneme charakteristickou rovnici ve tvaru

$$-\lambda^3 + 5\lambda^2 = 0.$$

Poznamenejme zde, že pro matice 3×3 bude charakteristická rovnice vždy stupně 3 tj. tzv. kubická rovnice. Takové rovnice umíme řešit pouze ve speciálních tvarech, jaký vyšel např. teď. Vytkneme λ^2 a řešení je evidentní:

$$\lambda^2(5-\lambda) = 0.$$

Vlastní čísla matice $\mathbf{B}$ jsou $\lambda_{1,2} = 0$ (je to dvojnásobný kořen) a $\lambda_3 = 5$.

Pro vlastní číslo $\lambda_{1,2} = 0$ nalezneme vlastní vektory jako řešení soustavy

$$(\mathbf{B} - \lambda_{1,2} \cdot \mathbf{E}) \cdot \boldsymbol{x} = (\mathbf{B} - 0 \cdot \mathbf{E}) \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}.$$

Protože vlastní číslo je nula, řešíme vlastně homogenní soustavu přímo s maticí $\mathbf{B}$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Je zřejmé, že při eliminaci matice $\mathbf{B}$ vypadnou dva řádky, máme tedy jedinou rovnici

$$2x + y + z = 0.$$

Zvolíme $x = t, t \in \mathbb{R}$ a $y = r, r \in \mathbb{R}$ a dopočítáme $z = -2t - r$. Pro vlastní vektory příslušné k $\lambda_{1,2} = 0$ dostáváme:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ r \\ -2t - r \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Vidíme, že řešení soustavy má dimenzi dva, hledáme dva reprezentanty. Nejjednodušší je použít přímo vektory, které se objevují ve výsledné lineární kombinaci. Dostáváme dva vlastní vektory $\boldsymbol{x_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ a $\boldsymbol{x_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ příslušné k vlastnímu číslu $\lambda_{1,2} = 0$. Říkáme, že vlastní vektory jsou dva, i když víme, že jich je nekonečně mnoho. Nejvýše dva z nich jsou ale lineárně nezávislé. Všimněme si také, že jsme dostali dva (nezávislé) vlastní vektory pro dvojnásobné vlastní číslo. Tyto souvislosti přesahují rámec tohoto kurzu, poznamenejme jen, že počet nalezených nezávislých vlastních vektorů je vždy menší nebo roven násobnosti příslušného vlastního čísla.

Pro vlastní číslo $\lambda_3 = 5$ nalezneme vlastní vektory jako řešení soustavy

$$(\mathbf{B} - \lambda_3 \cdot \mathbf{E}) \cdot \boldsymbol{x} = (\mathbf{B} - 5 \cdot \mathbf{E}) \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}.$$

Řešíme homogenní soustavu:

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Protože eliminace matice soustavy není evidentní, napíšeme ji:

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & -10 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

V posledním kroku jsme kromě vyškrtnutí nulového řádku vydělili druhý řádek číslem (-5). Máme dvě rovnice pro tři neznámé, soustava bude mít nekonečně mnoho řešení (tak, jak musí). Rovnice jsou

$$\begin{aligned} -3x + y + z &= 0 \\ 2y - z &= 0. \end{aligned}$$

Zvolíme $y = s, s \in \mathbb{R}$ a z druhé rovnice dopočteme $z = 2s$. T první rovnice pak vyjde $3x = y + z = 3s$, takže $x = s$. Pro vlastní vektory příslušné k $\lambda_3 = 5$ dostáváme:

$$\boldsymbol{x_3} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ s \\ 2s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

případně ještě zvolíme reprezentanta

$$\boldsymbol{x_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Nyní hledejme vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Charakteristickou rovnici dostáváme ve tvaru:

$$0 = \det(\mathbf{C} - \lambda \cdot \mathbf{E}) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & -4 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 4.$$

Rovnice $\lambda^2 + 4 = 0$ má záporný diskriminant, vlastní čísla budou tentokráte komplexní a to $\lambda_1 = 2i$ a $\lambda_2 = -2i$.

Pro vlastní číslo $\lambda_1 = 2i$ nalezneme vlastní vektory jako řešení soustavy

$$(\mathbf{C} - \lambda_1 \cdot \mathbf{E}) \cdot \boldsymbol{x} = (\mathbf{C} - 2i \cdot \mathbf{E}) \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}.$$

Řešíme homogenní soustavu:

$$\begin{bmatrix} -2i & -4 \\ 1 & -2i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

V matici 2×2 musí být druhý řádek násobkem prvního, v případě komplexní matice to ale může být komplexní násobek, což nemusí být vždy na první pohled poznat. Rozepíšeme radši eliminaci matice soustavy:

$$\begin{bmatrix} -2i & -4 \\ 1 & -2i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2i & -4 \\ 2i & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2i & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} i & 2 \end{bmatrix},$$

kde v prvním kroku jsme druhý řádek násobili číslem $2i$. Pak už je evidentní, že druhý řádek je násobkem prvního. Řešíme tedy soustavu jedné rovnice pro dvě neznámé: $ix + 2y = 0$. Zvolíme $x = t, t \in \mathbb{C}$ a dopočteme $2y = -ix = -it$, takže $y = -\frac{1}{2}it$. (Snažíme se zvolit parametr tak, abychom se vyhnuli dělení komplexním číslem.) Vlastní vektor příslušný k vlastnímu číslu $\lambda_1 = 2i$ dostáváme

$$\boldsymbol{x_1} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -\frac{1}{2}it \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2}i \end{bmatrix}.$$

Reprezentanta získáme volbou parametru např. $t = 2$, abychom se zbavili zlomků:

$$\boldsymbol{x_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ -i \end{bmatrix}.$$

Pro jistotu provedeme zkoušku a vynásobíme zadanou matici vlastním vektorem:

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4i \\ 2 \end{bmatrix} = 2i \begin{bmatrix} 2 \\ -i \end{bmatrix}.$$

Pro druhé vlastní číslo $\lambda_2 = -2i$ bude výpočet analogický, vše bude pouze komplexně sdružené. Pro toto vlastní číslo nalezneme vlastní vektory jako řešení soustavy

$$(\mathbf{C} - \lambda_2 \cdot \mathbf{E}) \cdot \boldsymbol{x} = (\mathbf{C} + 2i \cdot \mathbf{E}) \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}.$$

Řešíme homogenní soustavu:

$$\begin{bmatrix} 2i & -4 \\ 1 & 2i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Opět rozepíšeme eliminaci matice soustavy:

$$\begin{bmatrix} 2i & -4 \\ 1 & 2i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2i & -4 \\ 2i & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2i & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -i & 2 \end{bmatrix},$$

kde v prvním kroku jsme druhý řádek násobili číslem $2i$. Řešíme tedy soustavu jedné rovnice pro dvě neznámé: $-ix + 2y = 0$. Zvolíme $x = t, t \in \mathbb{C}$ a dopočteme $2y = ix = it$, takže $y = \dfrac{1}{2}it$. Vlastní vektor příslušný k vlastnímu číslu $\lambda_2 = -2i$ dostáváme

$$\boldsymbol{x_2} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ \frac{1}{2}it \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}i \end{bmatrix}.$$

Reprezentanta získáme volbou parametru např. $t = 2$, abychom se zbavili zlomků:

$$\boldsymbol{x_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ i \end{bmatrix}.$$

I zde provedeme zkoušku a vynásobíme zadanou matici vlastním vektorem:

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4i \\ 2 \end{bmatrix} = -2i \begin{bmatrix} 2 \\ i \end{bmatrix}.$$

Jako poslední příklad nalezněme vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Charakteristická rovnice vyjde ve tvaru

$$0 = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)^3.$$

Dostáváme jeden trojnásobný kořen (a jedno vlastní číslo) $\lambda_{1,2,3} = 2$ a pro vlastní vektory soustavu

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

což je jediná rovnice $y + z = 0$. Volíme $z = t, t \in \mathbb{R}$ a dopočteme $y = -t$. Poslední neznámá x se v rovnicích nevyskytuje, můžeme jí také zvolit $x = r, r \in \mathbb{R}$. Řešení je

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} r \\ -t \\ t \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Jako vhodné reprezentanty zvolíme např. $\boldsymbol{x_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ a $\boldsymbol{x_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

1.3 Příklady

Nalezněte vlastní čísla a vlastní vektory matic:

1. $$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. $$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

3. $$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

4. $$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

5. $$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Řešení: WolframAlpha a

```
eigenvalues {{3,-1},{1,1}}
```

1. $\lambda_{1,2} = 2$ a $\boldsymbol{x} = (1, 1)$
2. $\lambda_{1,2} = 2$, $\boldsymbol{x_1} = (1, 0)$ a $\boldsymbol{x_2} = (0, 1)$. Soustava s nulovou maticí znamená, že na neznámé nejsou žádné podmínky a všechny můžete zvolit. Jako reprezentanty vlastních vektorů můžete zvolit libovolné dva lineárně nezávislé vektory z $\mathbb{R}^2$.
3. $\lambda_1 = 2 + i$, $\boldsymbol{x_1} = (i, 1)$ a $\lambda_2 = 2 - i$, $\boldsymbol{x_2} = (-i, 1)$
4. $\lambda_1 = 5$, $\boldsymbol{x_1} = (0, 1, 1)$, $\lambda_2 = 2$, $\boldsymbol{x_2} = (-3, 4, 1)$ a $\lambda_3 = 0$, $\boldsymbol{x_3} = (-5, -2, 3)$
5. $\lambda_1 = 2$, $\boldsymbol{x_1} = (0, 0, 1)$, $\lambda_2 = i$, $\boldsymbol{x_2} = (i, 1, 0)$ a $\lambda_3 = -i$, $\boldsymbol{x_3} = (-i, 1, 0)$