Diferenciál

objem kvádru $V = a \cdot b \cdot c$

1\. měření: změříme a_1

$b_1 \rightarrow V_1 = a_1 \cdot b_1 \cdot c_1$

c_1

2\. měření: změříme $a_2 = a_1 + h_a$

$b_2 = b_1 + h_b \rightarrow V_2 = a_2 \cdot b_2 \cdot c_2 =$

$c_2 = c_1 + h_c$

$$= (a_1 + h_a) \cdot (b_1 + h_b) \cdot (c_1 + h_c) =$$

$$= \underline{a_1 b_1 c_1 +} a_1 b_1 h_c + b_1 c_1 h_a + a_1 c_1 h_b + a_1 h_b h_c + b_1 h_a h_c + c_1 h_a h_b + h_a h_b h_c$$

$$V_2 - V_1 = a_1 b_1 h_c + b_1 c_1 h_a + a_1 c_1 h_b + \cancel{a_1 h_b h_c} + \cancel{b_1 h_a h_c} + \cancel{c_1 h_a h_b} + \cancel{h_a h_b h_c}$$

h_a, h_b, h_c – MALÉ !!

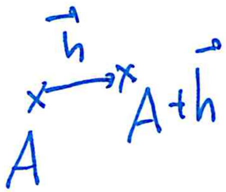
přibližně

$V_2 - V_1 \doteq a_1 b_1 h_c + b_1 c_1 h_a + a_1 c_1 h_b$ – lineární funkce v proměnných h_a, h_b, h_c

Obecně: máme funkci $z = f(x_1, x_2, x_3)$ a bod $A = [a_1, a_2, a_3]$

$f(A) = f(a_1, a_2, a_3)$ a pro vektor $\vec{h} = (h_1, h_2, h_3)$ chceme spočítat

$f(A+\vec{h})$ pro h_1, h_2, h_3 <u>malé</u>.



$$f(A+\vec{h}) - f(A) \overset{?}{\doteq} k_1 h_1 + k_2 h_2 + k_3 h_3.$$

Čísla k_1, k_2 a k_3 v praktických problémech často existují a výraz

$$f(A+\vec{h}) - f(A) \doteq df_A(h_1,h_2,h_3) = k_1 h_1 + k_2 h_2 + k_3 h_3$$ se nazývá diferenciál funkce f v bodě A a f se nazývá diferencovatelná v A. Je-li f v A diferencovatelná, platí

$$k_1 = \frac{\partial f(A)}{x_1} \qquad k_2 = \frac{\partial f(A)}{x_2} \qquad k_3 = \frac{\partial f(A)}{\partial x_3}$$

$$\boxed{df_A(h_1,h_2,h_3) = \frac{\partial f(A)}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f(A)}{\partial x_2} h_2 + \frac{\partial f(A)}{\partial x_3} h_3.}$$

$df_A(h_1,h_2,h_3)$ nám říká o kolik se změní funkční hodnota $f(A)$ ~~do~~, když se z bodu $A = [a_1,a_2,a_3]$ posuneme o malý kousek do bodu $A+\vec{h} = [a_1+h_1, a_2+h_2, a_3+h_3]$. $df_A = f(A+\vec{h}) - f(A)$

→ Má-li f v bodě A spojité parciální derivace podle všech proměnných, je v bodě A diferencovatelná.

→ Jsou-li parciální derivace f v bodě A diferencovatelné, platí

$$\frac{\partial^2 f(A)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(A)}{\partial y \partial x}$$

$f(x,y) = x^2 y^4$ a sestavíme diferenciál v bodě $A = [1,3]$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x y^4$ $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 4y^3$ $\frac{\partial f(A)}{\partial x} = 162$ $\frac{\partial f(A)}{\partial y} = 4 \cdot 27 = 108$

$df_A = \frac{\partial f(A)}{\partial x} h_x + \frac{\partial f(A)}{\partial y} h_y = 162 h_x + 108 h_y$

$\alpha = 0{,}998^2 \cdot 3{,}004^4 = f(0{,}998;\ 3{,}004)$ $1 \longrightarrow 0{,}998$ $h_x = 0{,}998 - 1$

$h_x = -0{,}002$

$f(1,3) = 1^2 \cdot 3^4 = 81$

$3 \to 3{,}004$ $h_y = 3{,}004 - 3$

$df_A = 162(-0{,}002) + 108(0{,}004) = -0{,}324 + 0{,}432 = 0{,}108$ $h_y = 0{,}004$

$\alpha = 0{,}998^2 \cdot 3{,}004^4 \triangleq f(0{,}998;3{,}004) \doteq f(1,3) + df_A = 81 + 0{,}108 = \boxed{81{,}108}$

objem kvádru: $a = 1 \pm 0{,}1\ j$

$b = 1 \pm 0{,}1\ j$

$c = 8 \pm 0{,}2\ j$

$$V = a \cdot b \cdot c = 1 \cdot 1 \cdot 8 = 8\ j^3$$

$$\boxed{V = (8 \pm 2)\ j^3}$$

$$\frac{\partial V}{\partial a} = bc \quad \frac{\partial V}{\partial b} = ac \quad \frac{\partial V}{\partial c} = ab$$

$$\frac{\partial V(A)}{\partial a} = 1 \cdot 8 = 8 \quad \frac{\partial V(A)}{\partial b} = 1 \cdot 8 = 8 \quad \frac{\partial V(A)}{\partial c} = 1 \cdot 1 = 1$$

$$dV_A = 8h_a + 8h_b + 1h_c$$

$$dV_{A\max} = 8 \cdot 0{,}1 + 8\ 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}2 = 1{,}8 \doteq 2$$

Na základě měření hmotnosti m, průměru a výšky válce (d, v) chceme spočítat hustotu daného válce.

$m = \underline{481{,}2} \pm 0{,}9$

$d = \underline{2{,}71} \pm 0{,}09$

$v = \underline{5{,}22} \pm 0{,}08$

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{S \cdot v} = \underline{\underline{\frac{4m}{\pi d^2 v}}} = \frac{4 \cdot 481{,}2}{\pi \cdot 2{,}71^2 \cdot 5{,}22} \doteq 15{,}9818$$

$A = [481{,}2;\ 2{,}71;\ 5{,}22]$

$$\frac{\partial \rho}{\partial m} = \frac{4}{\pi d^2 v} \doteq 0{,}033$$

$$\boxed{\rho = 16{,}0 \pm 1{,}4}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial d} = \frac{4m}{\pi v}(-2) \cdot d^{-3} = \frac{-8m}{\pi v d^3} \doteq -11{,}795$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial v} = \frac{4m}{\pi d^2}(-1)v^{-2} = \frac{-4m}{\pi d^2 v^2} \doteq -3{,}062$$

$$d\rho_A = \frac{\partial \rho(A)}{\partial m} h_m + \frac{\partial \rho(A)}{\partial d} \cdot h_d + \frac{\partial \rho(A)}{\partial v} h_v = 0{,}033 h_m - 11{,}795 h_d - 3{,}062 \cdot h_v$$

$$d\rho_{A\,max} = 0{,}033 \cdot 0{,}9 + 11{,}795 \cdot 0{,}09 + 3{,}062 \cdot 0{,}08 \doteq 1{,}34 \doteq 1{,}4$$