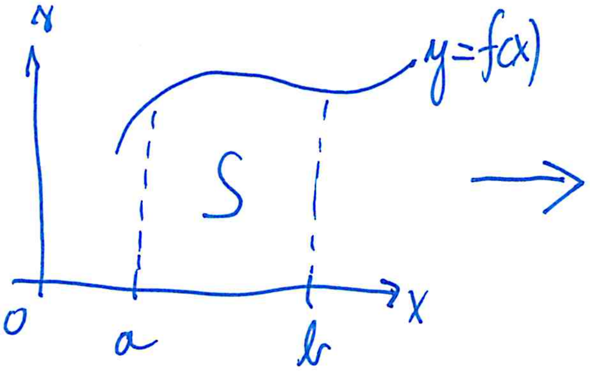
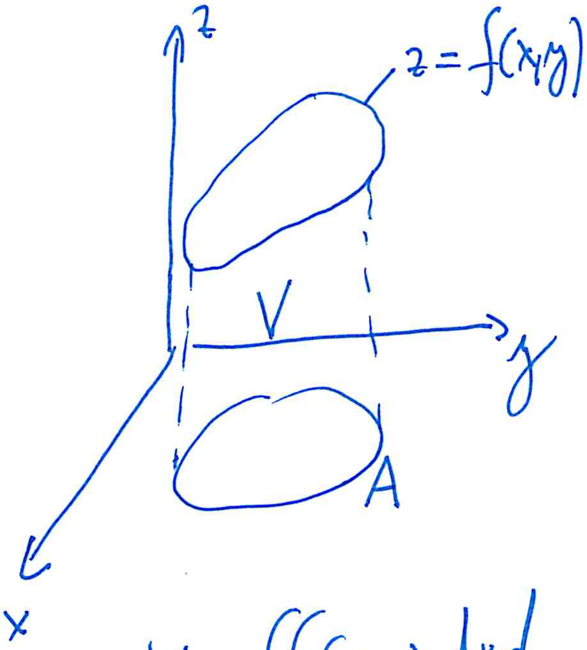
① Dvojný integrál - integrál funkce dvou proměnných





$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

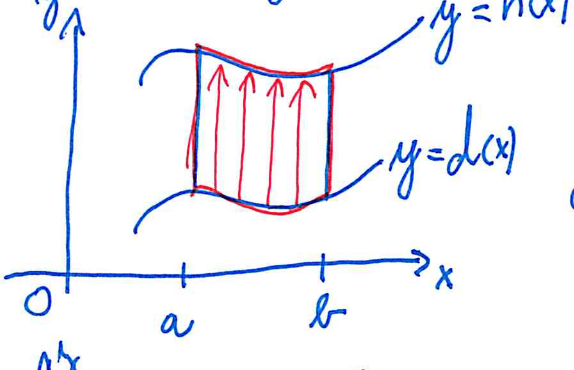
$$V = \iint_A f(x,y)\,dx\,dy$$

Integrační obory (pro dvojný integrál)

- omezené oblasti ohraničené grafy spojitých funkcí

a) v kartézských souřadnicích : x, y

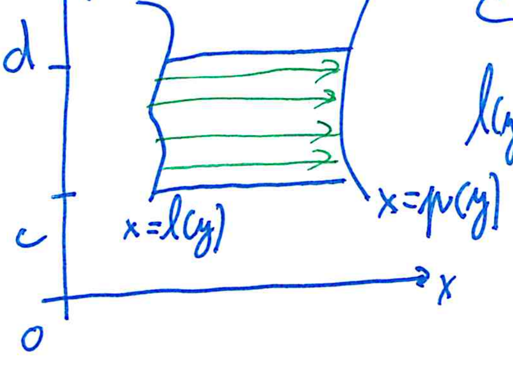
oblast typu I :



$a \le x \le b$

$d(x) \le y \le h(x)$

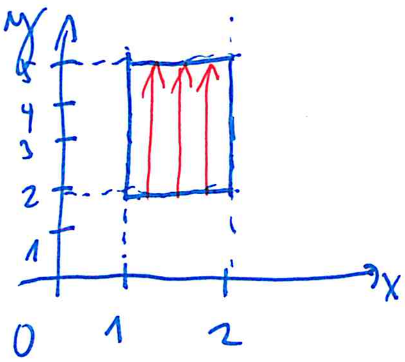
oblast typu II :



$c \le y \le d$

$l(y) \le x \le p(y)$

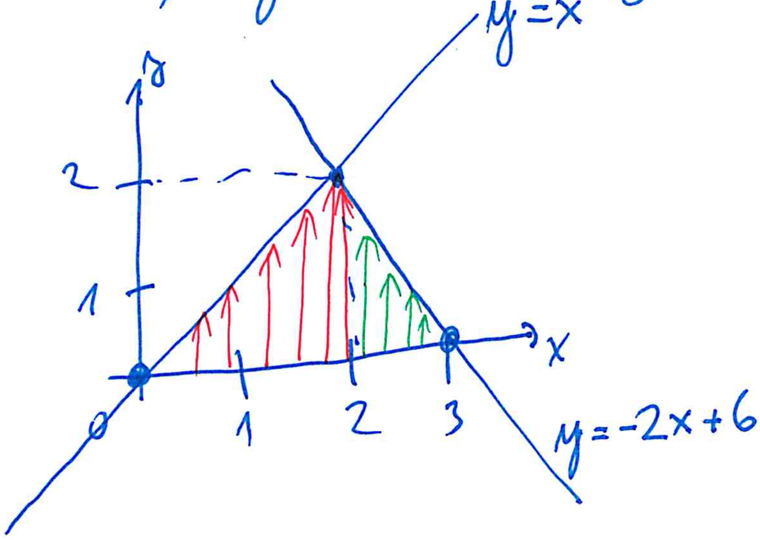
2) Příklady: a) obdélník $\langle 1,2\rangle \times \langle 2,5\rangle$



$1 \le x \le 2$

$2 \le y \le 5$

b) trojúhelník s vrcholy $[0,0]$, $[3,0]$, $[2,2]$



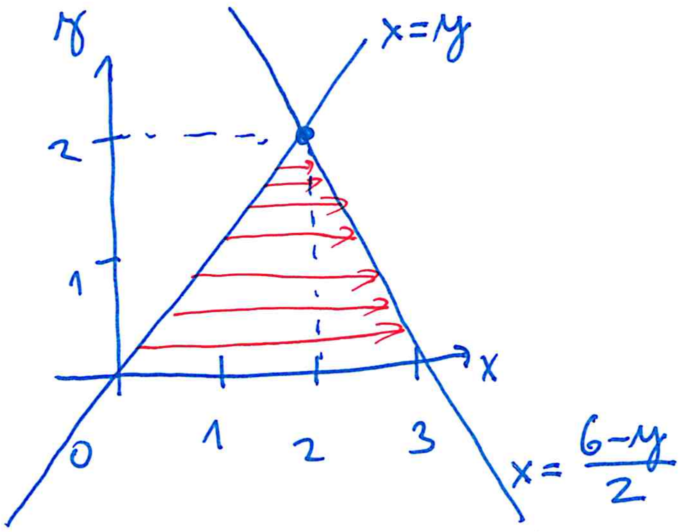
$0 \le x \le 2$

$0 \le y \le x$

a

$2 \le x \le 3$

$0 \le y \le 6-2x$

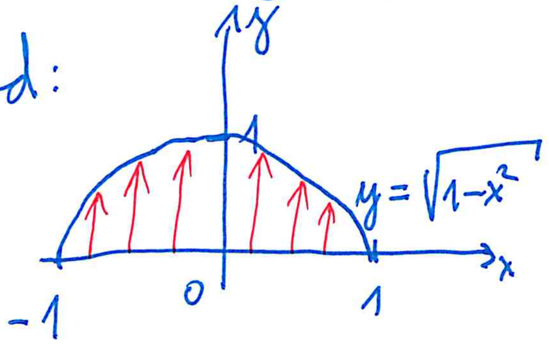


$0 \le y \le 2$

$y \le x \le \frac{6-y}{2}$

b) Integrační obory v polárních souřadnicích

příklad:



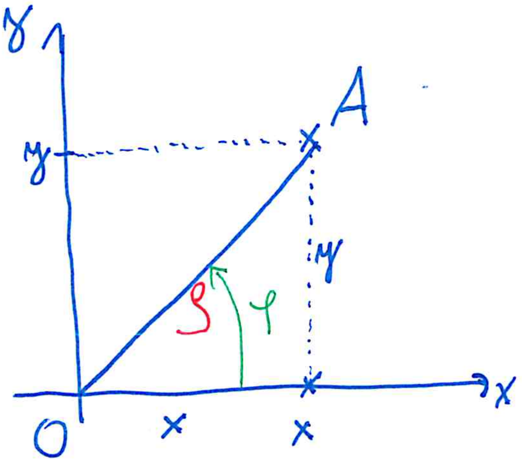
$x^2+y^2=1$

$y=\sqrt{1-x^2}$

$-1 \le x \le 1$

$0 \le y \le \sqrt{1-x^2}$

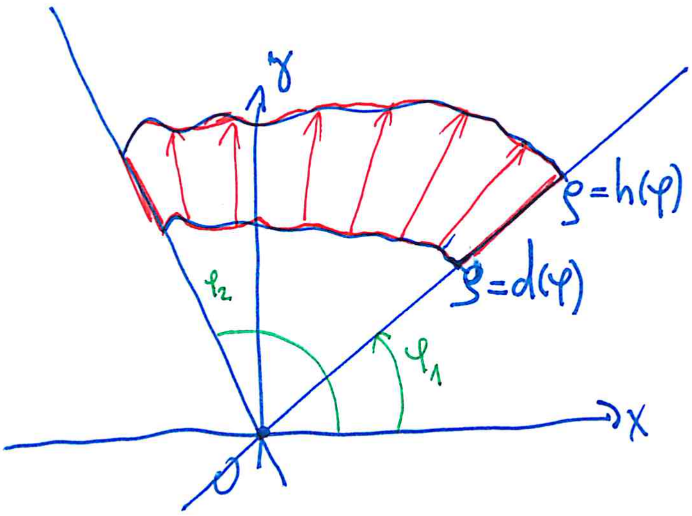
polární souřadnice



$\cos\varphi = \frac{x}{\varrho} \quad / \cdot \varrho \rightarrow$

$\sin\varphi = \frac{y}{\varrho} \quad / \cdot \varrho \rightarrow$

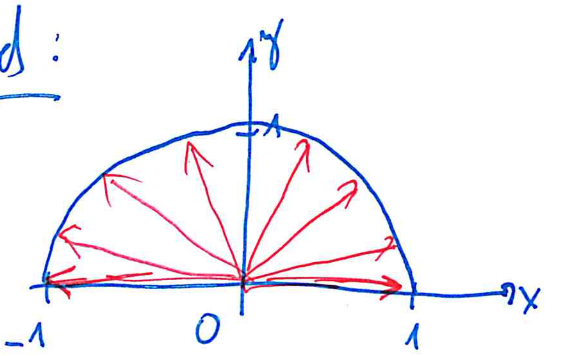
$$\boxed{\begin{aligned} x &= \varrho\cos\varphi \\ y &= \varrho\sin\varphi \end{aligned}}$$



$\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$

$d(\varphi) \le \varrho \le h(\varphi)$

příklad:



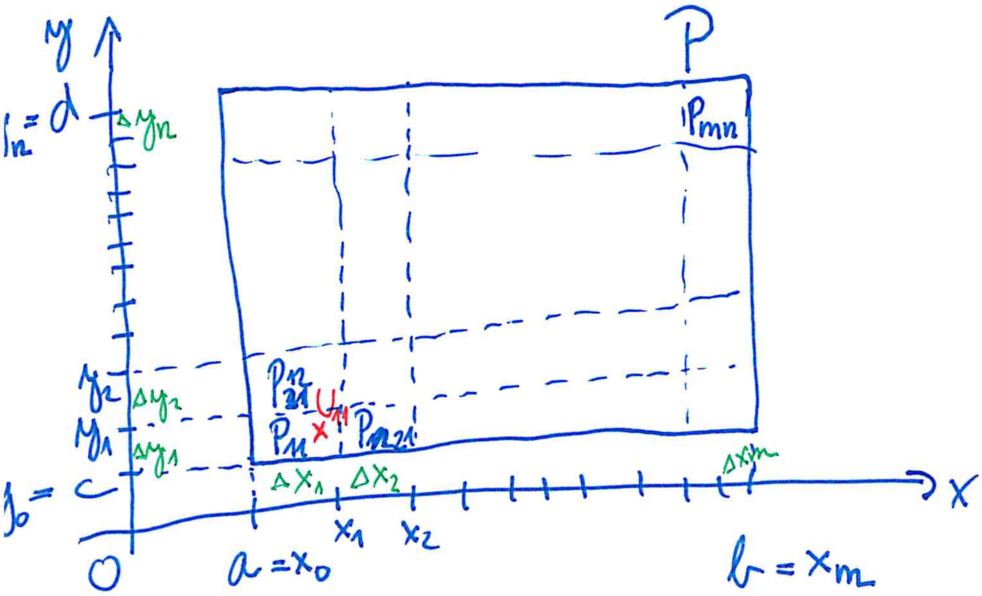
$0 \le \varphi \le \pi$

$0 \le \varrho \le 1$

Dvojný integrál

geom. motivace: objem mezi obrazcem v rovině xy a grafem nezáporné funkce $z = f(x,y)$

1) zavedení dvojného integrálu na obdélníku $P = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$



Zavedeme dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ tj množinu

$\{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_m = b\}$ $x_{i-1} < x_i$ pro $i = 1 \dots m$,

dělení intervalu $\langle c, d\rangle$

$\{c = y_0, y_1, y_2, \dots, y_n = d\}$ $y_{j-1} < y_j$ pro $j = 1 \dots n$,

a tzv. kroky $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ pro $i = 1 \dots m$

$\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$ pro $j = 1 \dots n$

Množina bodů $T = \{[x_i, y_j],\ i = 0, \dots, m,\ j = 0, \dots, n\}$

se nazývá síť s kroky $\Delta x_i, \Delta y_j$.

Obdélník P jsme rozdělili na $m \cdot n$ dílčích

obdélníků o stranách Δx_i a Δy_j: P_{ij}

Spočítáme velikost úhlopříček všech dílčích

obdélníků a vybereme z nich největší: toto

číslo označíme $h(T)$

$$h(T) = \max_{i,j} \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_j^2}$$

V každém obdélníku P_{ij} zvolíme libovolně bod $U_{ij} = [\mu_i, \eta_j]$

a utvoříme tzv. integrální součet:

$$S(f(x,y), T) = f(U_{11})\Delta x_1 \Delta y_1 + f(U_{12})\Delta x_1 \Delta y_2 + \dots + f(U_{mn})\Delta x_m \Delta y_n$$

(m·n objemů dílčích kvádrů)

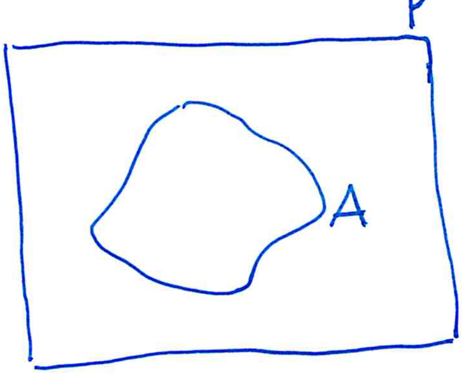
$$S(f(x,y), T) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(U_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j$$

Jestliže existuje takové číslo I, které lze aproximovat integrálním součtem s libovolnou přesností, nazýváme toto číslo I dvojný integrál funkce $z=f(x,y)$ na obdélníku P a značíme

$$I=\iint_P f(x,y)\,dx\,dy.$$

Jestliže I existuje, říkáme, že funkce f je integrovatelná na P.

Integrál na libovolné (omezené) množině $A\subset E_2$ z funkce $z=f(x,y)$



$$F(x,y)=f(x,y)\qquad [x,y]\in A$$
$$F(x,y)=0\qquad [x,y]\notin A$$

definujeme $$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy=\iint_P F(x,y)\,dx\,dy$$