Dvojný integrál: vlastnosti a výpočet (1)

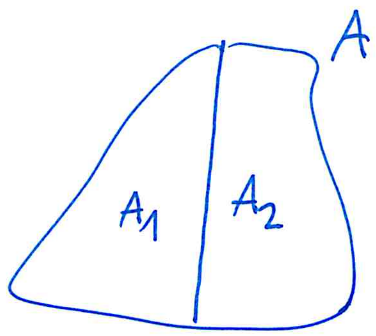
Jsou-li funkce f a g integrovatelné na $A \subset E_2$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ je lib. konstanta, jsou integrovatelné i funkce $\alpha . f$ a $f+g$ na A a platí:

$$\iint_A \alpha f \, dx\,dy = \alpha \iint_A f \, dx\,dy$$

$$\iint_A (f+g) \, dx\,dy = \iint_A f \, dx\,dy + \iint_A g \, dx\,dy$$

Je-li $A = A_1 \cup A_2$ a A_1 a A_2 nemají společné vnitřní body (nepřekrývají se), platí

$$\iint_A f \, dx\,dy = \iint_{A_1} f \, dx\,dy + \iint_{A_2} f \, dx\,dy$$



Věta o dvojnásobném integrálu (Fubiniova věta):

Nechť funkce $z = f(x,y)$ je integrovatelná na množině A, která je oborem typu I: $a \le x \le b$, $d(x) \le y \le h(x)$.

Jestliže pro každé $x \in \langle a, b \rangle$ je funkce $y \mapsto f(x,y)$ integrovatelná na $\langle d(x), h(x) \rangle$, je integrovatelná i $x \mapsto \int_{d(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy$ na $\langle a, b \rangle$ a platí:

$$\boxed{\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{d(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy \right) dx}$$

dvojný integrál

dvojnásobný integrál

vnitřní integrál – podle y

vnější integrál – podle x

Nechť funkce $z = f(x,y)$ je integrovatelná na množině B, která je obrazcem typu II: $c \leq y \leq d$, $l(y) \leq x \leq p(y)$.

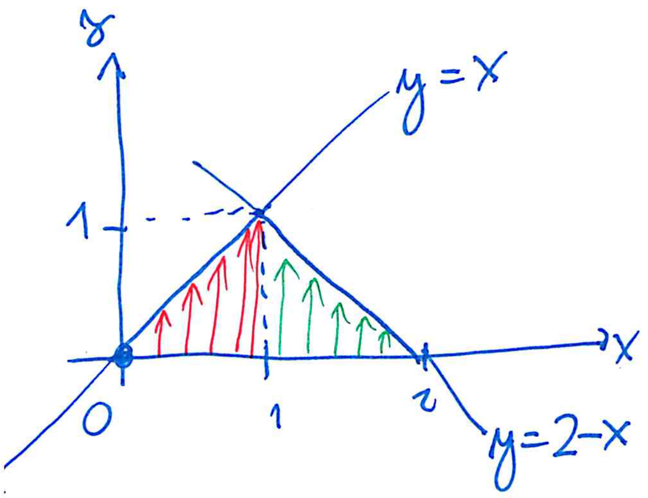
Jestliže pro každé $y \in \langle c, d \rangle$ je fce $x \mapsto f(x,y)$ je integrovatelná $\langle l(y), p(y) \rangle$, je integrovatelná i

$y \mapsto \int_{l(y)}^{p(y)} f(x,y) \cancel{dy}\, dx$ a platí:

$$\boxed{\iint_B f(x,y)\, dx\, dy = \int_c^d \left(\int_{l(y)}^{p(y)} f(x,y)\, dx \right) dy}$$

Příklady: $\displaystyle\iint_A (x+2y)\,dx\,dy$

k Δ s vrcholy $[0,0]$, $[1,1]$, $[2,0]$



A_1: $0 \le x \le 1$

$0 \le y \le x$

a

A_2: $1 \le x \le 2$

$0 \le y \le 2-x$

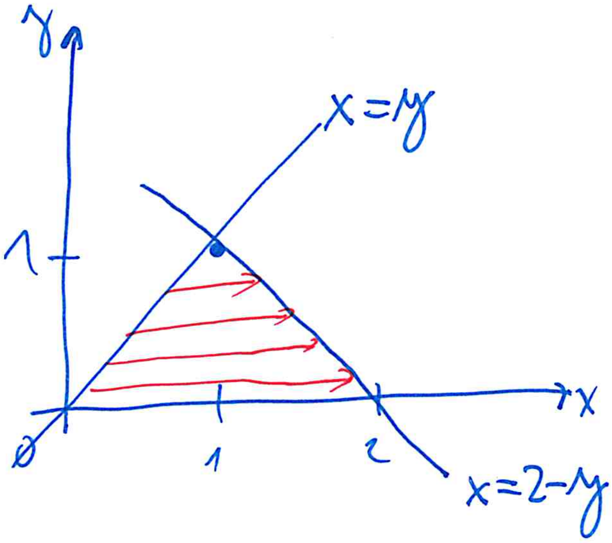
$$\iint_A (x+2y)\,dx\,dy = \iint_{A_1} (x+2y)\,dx\,dy + \iint_{A_2} (x+2y)\,dx\,dy =$$

$$= \underbrace{\int_0^1 \Big(\underbrace{\int_0^x (x+2y)\,dy}_{*}\Big)\,dx}_{\frac{2}{3}} + \underbrace{\int_1^2 \Big(\int_0^{2-x} (x+2y)\,dy\Big)\,dx}_{1\,?\ \text{DÚ}}$$

vnitřní integrál:

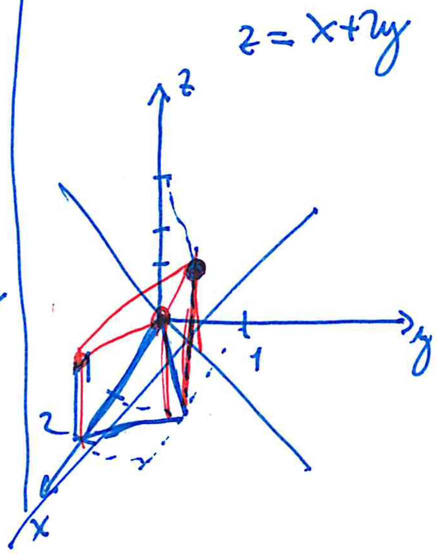
$$(*)\quad \int_0^x (x+2y)\,dy = \left[xy + y^2\right]_0^x = x^2 + x^2 = 2x^2$$

$$\int_0^1 2x^2\,dx = \left[2\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$



$0 \le y \le 1$

$y \le x \le 2-y$



$$\iint_A (x+2y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_y^{2-y} (x+2y)\,dx \right) dy = \int_0^1 (2+2y-4y^2)\,dy =$$

$$= \left[2y + y^2 - \frac{4}{3}y^3\right]_0^1 = 2+1-\frac{4}{3} = \underline{\underline{\frac{5}{3}}}$$

$$(*)\quad \int_y^{2-y} (x+2y)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + 2yx\right]_y^{2-y} = \frac{1}{2}(2-y)^2 + 2y(2-y) - \left(\frac{1}{2}y^2 + 2y^2\right) =$$

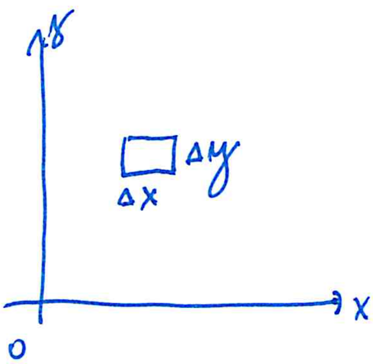
$$= 2 - 2y + \cancel{\tfrac{1}{2}y^2} + 4y - 2y^2 - \cancel{\tfrac{1}{2}y^2} - 2y^2 = -4y^2 + 2y + 2 \quad (*)$$

⑥ Výpočet dvojného integrálu v polárních souřadnicích

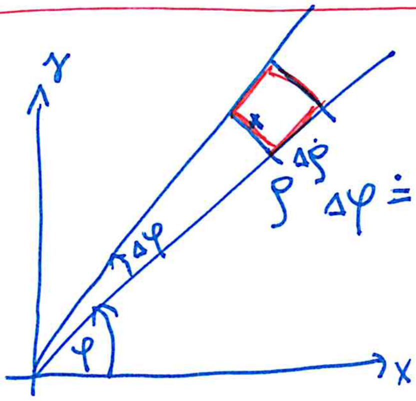
Pro spojitou funkci $z = f(x,y)$ můžeme pomocí transformačních rovnic $x = \rho\cos\varphi$ a $y = \rho\sin\varphi$ psát $z = f(x,y) = f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) = g(\rho,\varphi)$

Nechť $\bar{A}$ značí obor, který vznikne z A transformací do polárních souřadnic. Pak platí:

$$\boxed{\iint\limits_{A} f(x,y)\,\underline{dx\,dy} = \iint\limits_{\bar{A}} g(\rho,\varphi)\cdot\underline{\rho\, d\rho\, d\varphi}}$$



$\Delta S = \underline{\Delta x \Delta y}$

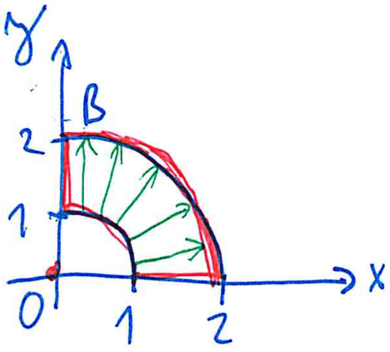


$\Delta\varphi \doteq \operatorname{tg}\Delta\varphi = \dfrac{x}{\rho}$

$x = \rho\cdot\Delta\varphi$

$\Delta S = x\cdot\Delta\rho = \underline{\rho\cdot\Delta\rho\Delta\varphi}$

Příklad: $\displaystyle\iint_B (x^2+y^2)\,dx\,dy$



$x = \rho\cos\varphi \qquad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$

$y = \rho\sin\varphi \qquad 1 \le \rho \le 2$

$$\iint_B (x^2+y^2)\,dx\,dy = \iint_{\overline{B}} (\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi)\cdot\rho\,d\rho\,d\varphi = \iint_{\overline{B}} \rho^3\,d\rho\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_1^2 \rho^3\,d\rho \right) d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_1^2 d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4 - \frac{1}{4}\right) d\varphi =$$

$$= \frac{15}{4}\left[\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\underline{\frac{15}{8}\pi}}$$

Obecněji: $x,y \to u,v$

Pro $x = g_1(u,v)$

$y = g_2(u,v)$ platí za splnění předpokladů věty o substituci (viz literatura)

$$\boxed{\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\bar{A}} f(g_1(u,v), g_2(u,v)) \cdot |J(u,v)|\,du.dv},$$

kde J je tzv. Jakobián: $J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u} & \frac{\partial g_1}{v} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u} & \frac{\partial g_2}{\partial v} \end{vmatrix}$

Příklad: Spočítejte Jakobián pro polární souřadnice

$x = \rho\cos\varphi$

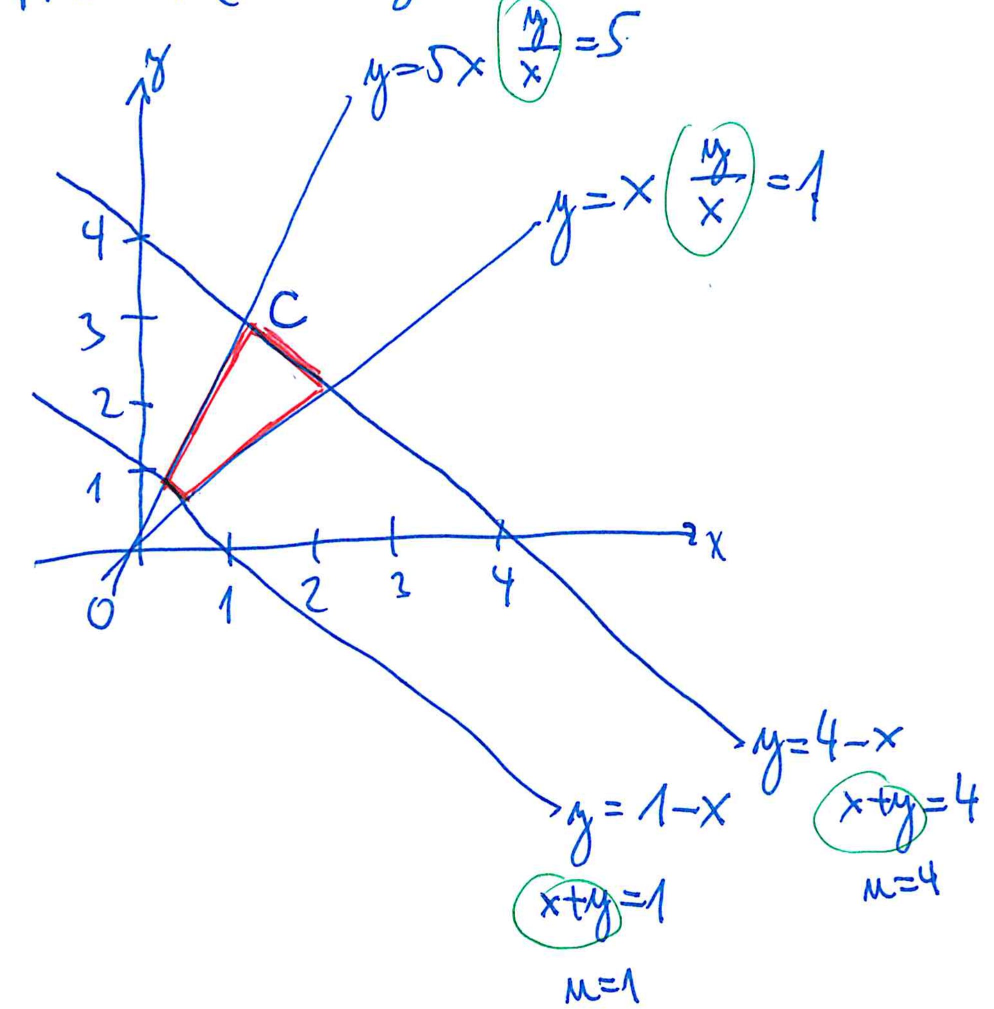
$y = \rho\sin\varphi$

$\left(\begin{array}{l} x = x(\rho,\varphi) \\ y = y(\rho,\varphi) \end{array}\right.$

$$J(\rho,\varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi = \rho$$

Příklad (náročnější)



$$u = x + y$$
$$v = \frac{y}{x}$$

$$1 \le u \le 4$$
$$1 \le v \le 5$$

Potřebujeme jakobián: potřebujeme vyjádřit $x\,y$ v závislosti na u a v: $y = vx$ (2r) a dosazení do (1.r.) $u = x + vx$

$$u = x(1+v)$$

$$\boxed{x = \frac{u}{1+v} \qquad y = \frac{uv}{1+v}}$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{1+v} \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = -u(1+v)^{-2} = \frac{-u}{(1+v)^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{v}{1+v} \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{u(1+v) - uv}{(1+v)^2} = \frac{u}{(1+v)^2}$$

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{1+v} & \frac{-u}{(1+v)^2} \\ \frac{v}{1+v} & \frac{u}{(1+v)^2} \end{vmatrix} = \frac{u}{(1+v)^3} + \frac{uv}{(1+v)^3} = \underline{\underline{\frac{u}{(1+v)^2}}}$$

$$\iint_C \frac{y}{x}\,dx\,dy = \iint_{\overline{C}} \frac{\cancel{\frac{uv}{1+v}}}{\cancel{\frac{u}{1+v}}} \frac{u}{(1+v)^2}\,du\,dv =$$

10

$$= \iint_{\overline{C}} \frac{uv}{(1+v)^2}\,du\,dv = \int_1^5 \left(\int_1^4 \frac{uv}{(1+v)^2}\,du \right) dv = *$$

$$* \quad \int_1^4 \frac{uv}{(1+v)^2}\,du = \frac{v}{(1+v)^2} \cdot \frac{1}{2}\left[u^2\right]_1^4 = \frac{15}{2} \frac{v}{(1+v)^2}$$

$$= \frac{15}{2}\int_1^5 \frac{v}{(1+v)^2}\,dv = \frac{15}{2}\left[\frac{1}{2}\ln(1+2v+v^2) + \frac{1}{1+v}\right]_1^5 = \frac{15}{2}\left(\ln 6 + \frac{1}{6} - \ln 2 - \frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{15}{2}\left(\ln 3 - \frac{1}{3}\right)}$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2v+2-2}{1+2v+v^2}\,dv = \frac{1}{2}\int \frac{2v+2}{1+2v+v^2}\,dv - \int \frac{1}{(1+v)^2}\,dv =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(1+2v+v^2) - \frac{(1+v)^{-1}}{-1} = \underbrace{\frac{1}{2}\ln(1+2v+v^2)}_{= \ln(1+v)} + \frac{1}{1+v}$$