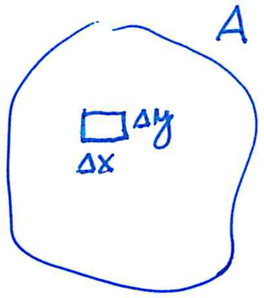
POUŽITÍ DVOJNÉHO INTEGRÁLU

Obsah rovinného obrazce A

$$S(A)=\iint_A 1\,dx\,dy$$

Hmotnost rovinného obrazce A s plošnou hustotou $h=h(x,y)$

$$m(A)=\iint_A h(x,y)\,dx\,dy$$



$$\Delta S=\Delta x\cdot\Delta y$$

$$\Delta m=h\,\Delta x\,\Delta y$$

Těžiště obrazce A s plošnou hustotou $h=h(x,y)$

$$x_T=\frac{1}{m(A)}\iint x\cdot h(x,y)\,dx\,dy \qquad T=[x_T,y_T]$$

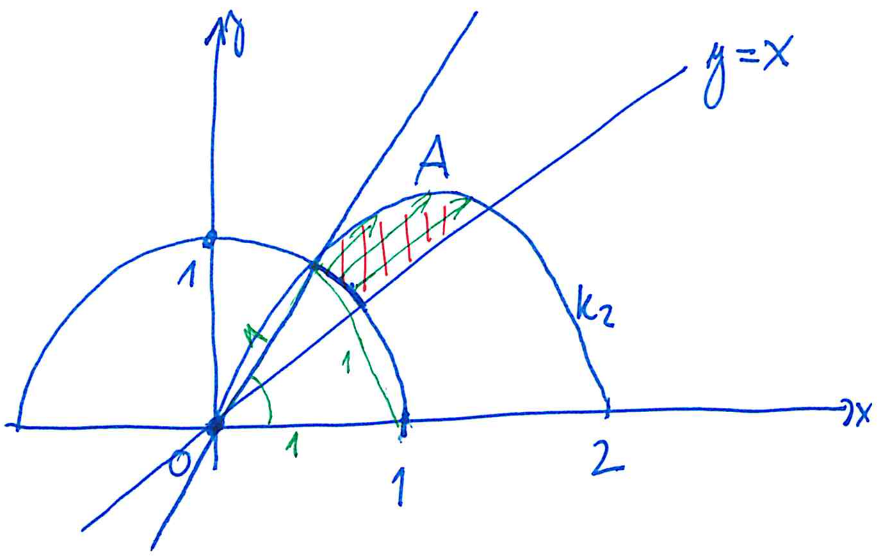
$$y_T=\frac{1}{m(A)}\iint y\cdot h(x,y)\,dx\,dy$$

Moment setrvačnosti obrazce A

vzhledem k ose x : $I_x=\iint_A y^2\,h(x,y)\,dx\,dy$

y : $I_y=\iint_A x^2\,h(x,y)\,dx\,dy$

Príklad: Spočítejte obsah:



$x = \rho\cos\varphi$

$y = \rho\sin\varphi$

$\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$

$1 \le \rho \le 2\cos\varphi$

$$S(A) = \iint\limits_A 1\,dx\,dy = \iint\limits_A \rho\,d\rho\,d\varphi =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \Big(\underbrace{\int_0^{2\cos\varphi} \rho\,d\rho}_{*} \Big) d\varphi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \Big(\cos 2\varphi + \frac{1}{2}\Big) d\varphi =$$

$$= \Big[\frac{1}{2}\sin 2\varphi + \frac{1}{2}\varphi\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} - 1 - \frac{\pi}{4}\Big) \doteq 0{,}065$$

$(x-1)^2 + y^2 = 1$

$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1$

$x^2 + y^2 - 2x = 0$

$\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi - 2\rho\cos\varphi = 0$

$\rho^2 - 2\rho\cos\varphi = 0$

$\rho(\rho - 2\cos\varphi) = 0 \quad < \quad \rho = 0, \quad \boxed{\rho = 2\cos\varphi}$

rovnice k_2

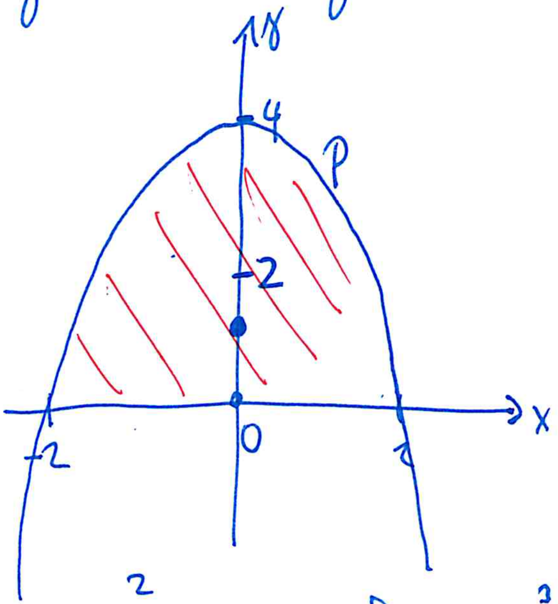
$$(*) \quad \int_1^{2\cos\varphi} \rho\,d\rho = \frac{1}{2}\big[\rho^2\big]_1^{2\cos\varphi} = \underbrace{2\cos^2\varphi - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}} + \frac{1}{2} = \cos 2\varphi + \frac{1}{2}$$

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \cos^2\varphi - (1 - \cos^2\varphi) = 2\cos^2\varphi - 1$$

Spočítejte hmotnost, souřadnice těžiště a moment setrvačnosti vzhledem k ose x parabolické úseče ohraničené

$h(x,y)=1$

$y=4-x^2$ a $y=0$



$-2 \le x \le 2$

$0 \le y \le 4-x^2$

$$m(P)=\iint_P 1\,dx\,dy=\int_{-2}^{2}\left(\int_0^{4-x^2} 1\,dy\right)dx=$$

$$=\int_{-2}^{2}(4-x^2)\,dx=\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2}=2\left(8-\frac{8}{3}\right)=\frac{16}{3}\cdot 2=\underline{\underline{\frac{32}{3}}}$$

Těžiště: $\boxed{x_T=0}$, $y_T=\frac{3}{32}\iint_P y\,dx\,dy=\frac{3}{32}\int_{-2}^{2}\left(\int_0^{4-x^2} y\,dy\right)dx$ (*) $=\frac{3}{64}\int_{-2}^{2}(16-8x^2+x^4)\,dx$

$$=\frac{3}{64}\left[16x-\frac{8}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5\right]_{-2}^{2}=\frac{3}{32}\left(32\cancel{4}-\frac{64}{3}+\frac{32}{5}\right)=3\left(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)=$$

$$=3\,\frac{15-10+3}{15}=\boxed{\frac{8}{5}}=y_T$$

(*) $\displaystyle\int_0^{4-x^2} y\,dy=\frac{1}{2}\left[y^2\right]_0^{4-x^2}=\frac{1}{2}(4-x^2)^2=\frac{1}{2}(16-8x^2+x^4)$

Moment setrvačnosti vzhledem k ose x:

$$I_x = \iint_P y^2\,dx\,dy = \int_{-2}^{2}\left(\int_0^{4-x^2} y^2\,dy\right)dx = \frac{1}{3}\int_{-2}^{2}\left(64-48x^2+12x^4-x^6\right)dx =$$

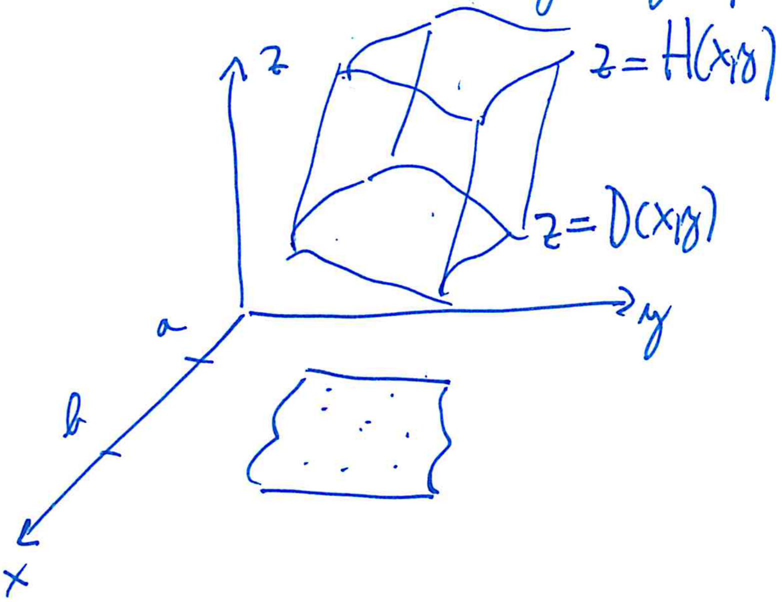
$$= \frac{1}{3}\left[64x - 48\frac{x^3}{3} + 12\frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}\right]_{-2}^{2} = \frac{4096}{105}$$

$$* \quad \int_0^{4-x^2} y^2\,dy = \frac{1}{3}\left[y^3\right]_0^{4-x^2} = \frac{1}{3}\left(4-x^2\right)^3 = \frac{1}{3}\left(64-48x^2+12x^4-x^6\right)$$

Trojný integrál – integrál funkce tří proměnných (5)

integrační obory pro trojný integrál

tělesa ohraničená grafy spojitých funkcí

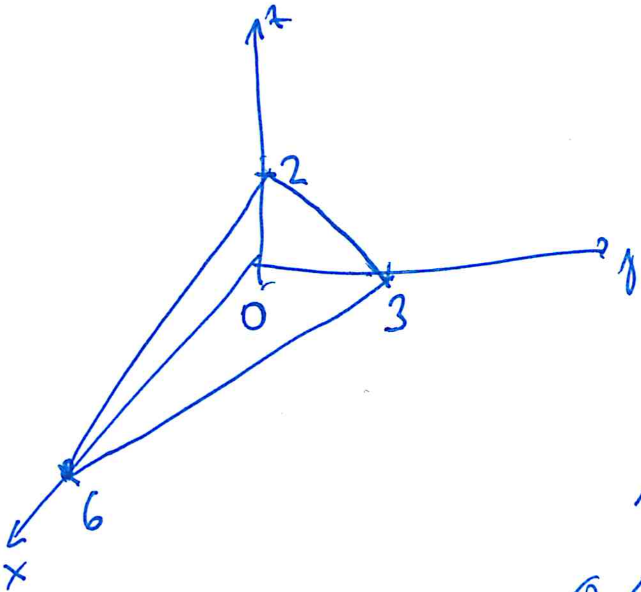


$$a \le x \le b$$

$$d(x) \le y \le h(x)$$

$$D(x,y) \le z \le H(x,y)$$

Příklad: těleso ohraničené rovinami $x=0, y=0, z=0, x+2y+3z=6$ (*)

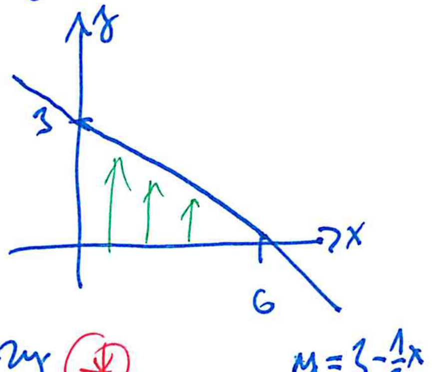


průmět do xy

$$0 \le x \le 6$$

$$0 \le y \le 3-\frac{1}{2}x$$

$$0 \le z \le \frac{6-x-2y}{3} \quad (*)$$

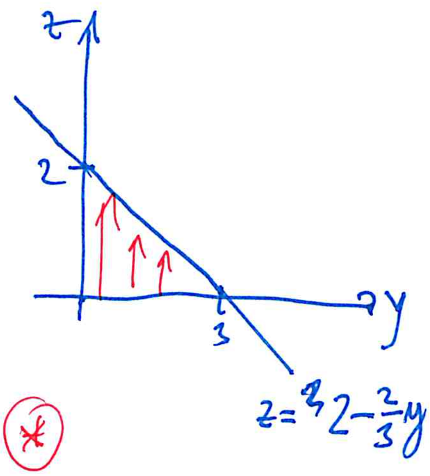


průmět do yz

$$0 \le y \le 3$$

$$0 \le z \le 2-\frac{2}{3}y$$

$$0 \le x \le 6-2y-3z \quad (*)$$



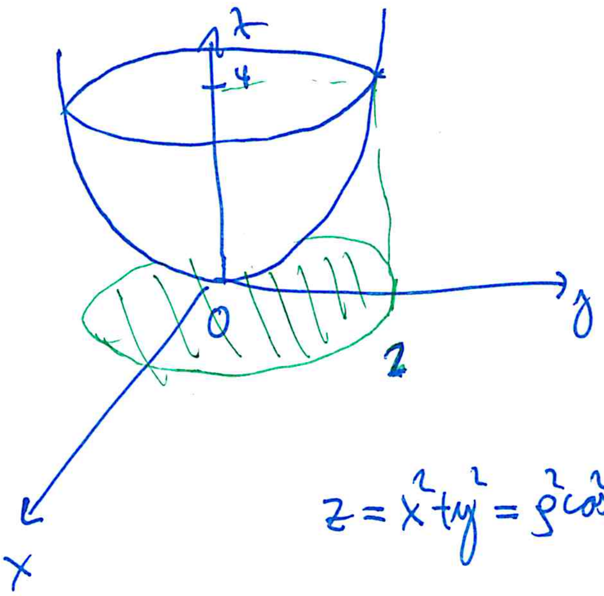
Válcové souřadnice

$x, y, z \to \rho, \varphi, z$, kde ρ a φ jsou polární souřadnice průmětu bodu do roviny xy

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi \\ y &= \rho\sin\varphi \\ z &= z \end{aligned}}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \underline{\underline{\rho}}$$

Příklad: Obor ohraničený plochami $z = x^2 + y^2$ a $z = 4$



$$0 \le \rho \le 2$$

$$0 \le \varphi \le 2\pi$$

$$\rho^2 \le z \le 4$$

$$z = x^2 + y^2 = \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = \rho^2$$

Sférické (kulové) souřadnice

sféra: plocha, povrch koule $\quad x^2+y^2+z^2=R^2$

koule: těleso $\quad x^2+y^2+z^2\le R^2$

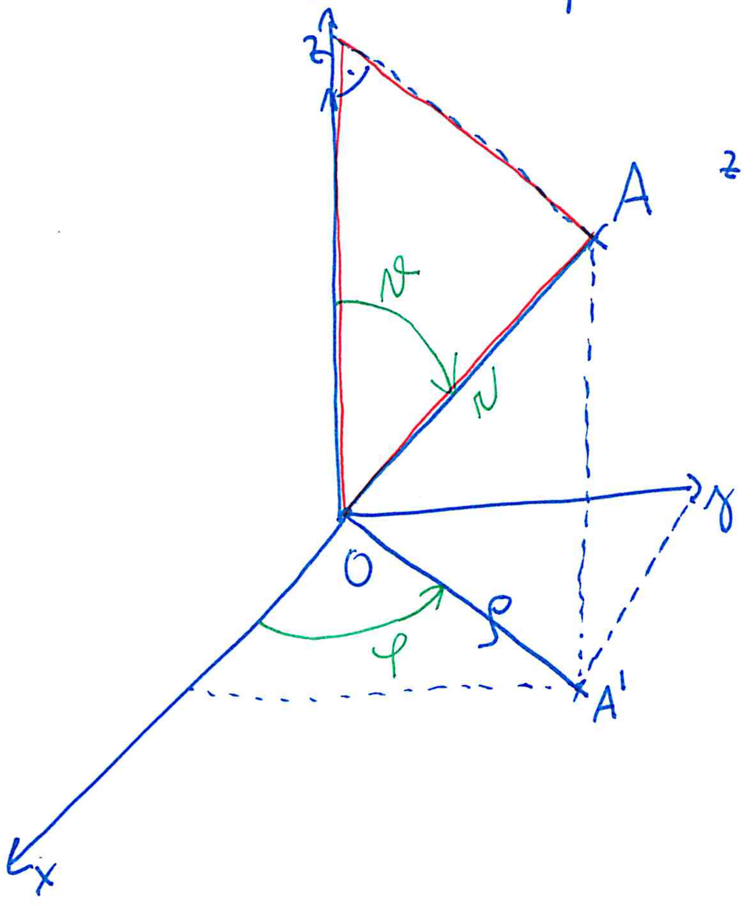
$x, y, z \to r, \varphi, \vartheta$

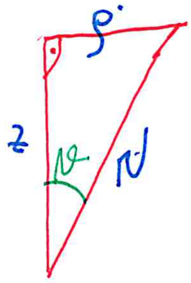
r – vzdálenost bodu od počátku

φ – orientovaný úhel, který svírá průmět průvodiče bodu do xy s kladnou poloosou x

$$\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

ϑ – orientovaný úhel, který svírá průvodič s kladnou poloosou z. $\quad \vartheta \in \langle 0, \pi \rangle$





$$\boxed{\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi = r\sin\vartheta\cos\varphi \\ y &= \rho\sin\varphi = r\sin\vartheta\sin\varphi \\ z &= r\cdot\cos\vartheta \end{aligned}}$$

$$\sin\vartheta = \frac{\rho}{r} \to \rho = r\sin\vartheta$$

$$\cos\vartheta = \frac{z}{r} \to \underline{z = r\cdot\cos\vartheta}$$

Jakobián pro sférické souřadnice

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \end{vmatrix}$$

$$J = r^2\cos^2\vartheta\cos^2\varphi\sin\vartheta + r^2\sin^2\vartheta\sin^2\varphi\sin\vartheta +$$

$$+ r^2\sin^2\varphi\cos^2\vartheta\sin\vartheta + r^2\sin^3\vartheta\cos^2\varphi =$$

$$= r^2\sin\vartheta\left(\cos^2\vartheta\cos^2\varphi + \overbrace{\sin^2\vartheta\sin^2\varphi + \sin^2\varphi\cos^2\vartheta}^{\sin^2\varphi(\sin^2\vartheta+\cos^2\vartheta)} + \sin^2\vartheta\cos^2\varphi\right)$$

$$\cos^2\varphi(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta)$$

$$\boxed{J = r^2\sin\vartheta}$$