KŘIVKA je množina bodů v rovině resp. v prostoru zadaná parametrickými rovnicemi

$$x = x(t), y = y(t) \quad \text{resp.} \quad x = x(t), y = y(t), z = z(t)$$

pro $t \in \langle a, b \rangle$, kde $x = x(t)$, $y = y(t)$ a $z = z(t)$ jsou spojité funkce na $\langle a, b \rangle$.

JEDNODUCHÁ KŘIVKA: každým dvěma $t_1, t_2 \in \langle a, b \rangle$, $t_1 \neq t_2$, přičemž ani jedno není hraniční bod $\langle a, b \rangle$ odpovídají různé body $[x(t_1), y(t_1)]$ a $[x(t_2), y(t_2)]$.

→ Jednoduchá křivka se neprotíná. Konce se napojit můžou. Taková křivka se nazývá uzavřená: $[x(a), y(a)] = [x(b), y(b)]$.

(a v prostoru analogicky)

ORIENTACE KŘIVKY: ZADÁNÍ POČÁTEČNÍHO A KONCOVÉHO BODU

U uzavřené křivky mluvíme o kladné orientaci při obíhání proti směru hod. ručiček.

A ZÁROVEŇ / NEBO

uspořádání bodů s ohledem na rostoucí hodnoty parametru: $[x(t_1), y(t_1)]$ předchází $[x(t_2), y(t_2)]$ pro $t_1 < t_2$

Příklady: $A=[1,1]$, $B=[2,3]$

úsečka z A do B: $X=A+(B-A)t$, $t\in\langle 0,1\rangle$

$$\begin{aligned} x&=1+t \\ y&=1+2t \end{aligned} \quad t\in\langle 0,1\rangle$$ je úsečka AB orientovaná z A do B

$$\begin{aligned} x&=2-t \\ y&=3-2t \end{aligned} \quad t\in\langle 0,1\rangle$$ –||– orientovaná z B do A

$$\begin{aligned} x&=1+4\cos t \\ y&=2+4\sin t \end{aligned} \quad t\in\langle 0,2\pi\rangle$$ je kružnice $S=[1,2]$, $R=4$

---

křivka zadaná jako graf spojité funkce: např. $y=x^2$ pro $x\in\langle 1,2\rangle$

$$\begin{aligned} x&=t \\ y&=t^2 \end{aligned} \quad t\in\langle 1,2\rangle$$

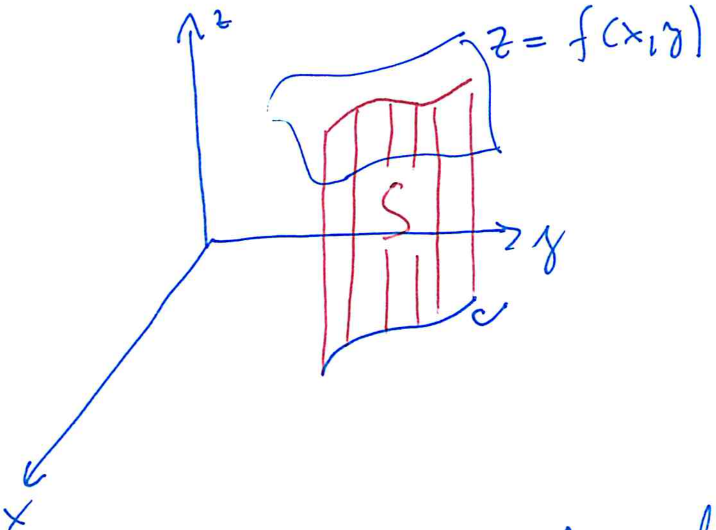
KŘIVKA se nazývá HLADKÁ na $\langle a,b\rangle$, jestliže pro každé $t\in\langle a,b\rangle$ existují spojité $x'(t)$, $y'(t)$ příp. $z'(t)$ a nejsou současně rovny nule.

KŘIVKA se nazývá PO ČÁSTECH HLADKÁ, jestliže vznikne spojením hladkých křivek.

KŘIVKOVÝ INTEGRÁL 1. druhu

Geom. interpretace u funkce dvou proměnných $z = f(x,y)$: chceme spočítat obsah plochy mezi křivkou v rovině xy a grafem $z = f(x,y)$. Integrál by se dal definovat z této úlohy pomocí dělení, obsahů obdélníků atd.

Uděláme to ale jinak.



Def: Nechť je dána reálná funkce f na po částech hladké křivce c: $x = x(t)$, $y = y(t)$ (a příp. $z = z(t)$), $t \in \langle a,b\rangle$. Křivkový integrál 1. druhu funkce f podél c definujeme jako:

$$\int f(x,y)\,ds = \int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt \quad \text{pro } u = f(x,y)$$

případně

$$\int f(x,y,z)\,ds = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,dt \quad \text{pro } u = f(x,y,z)$$

Vlastnosti: $\int_C \alpha f\,ds = \alpha \int f\,ds \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

$$\int_C (f+g)\,ds = \int_C f\,ds + \int_C g\,ds$$

$$\int_C f\,ds = \int_{C_1} f\,ds + \int_{C_2} f\,ds \quad , \text{kde } C = C_1 \cup C_2 \text{ a}$$

C_1 a C_2 jsou na sebe navazující křivky nemají společné vnitřní body.

Příklad: $\int_C x^2\,ds$, kde c je $y = \ln x$ pro $x \in \langle 1,3 \rangle$

1) parametrisace: $x = t$, $y = \ln t$, $t \in \langle 1,3 \rangle$, $x' = 1$, $y' = \frac{1}{t}$

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt = \frac{\sqrt{t^2+1}}{t}\,dt$$

2) výpočet:

$$\int_C x^2\,ds = \int_1^3 t^2 \frac{\sqrt{t^2+1}}{t}\,dt = \int_1^3 t\sqrt{t^2+1}\,dt = \left| \begin{array}{l} u = t^2+1 \\ du = 2t\,dt \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int_2^{10} \sqrt{u}\,du = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left[u^{\frac{3}{2}}\right]_2^{10} = \frac{1}{3}\left(\sqrt{1000} - 2\sqrt{2}\right)$$

Aplikace: délka křivky: $l = \int_C 1\,ds$

hmotnost: $m = \int_C h\,ds$, kde $h=h(x,y)$ příp. $h=h(x,y,z)$ je délková hustota

těžiště: $T=[x_T, y_T]$ nebo $T=[x_T, y_T, z_T]$

$$x_T = \frac{1}{m}\int_C x h\,ds$$

$$y_T = \frac{1}{m}\int_C y h\,ds$$

případně: $z_T = \frac{1}{m}\int_C z h\,ds$

momenty setrvačnosti vzhledem k osám (v prostoru)

hmotnost

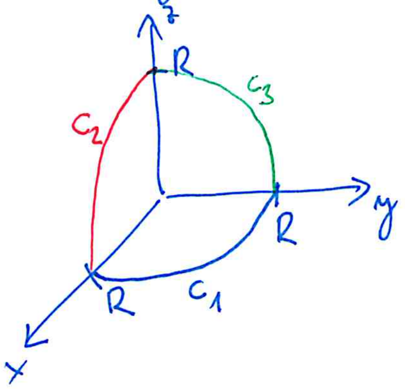
$$I_x = \int_C (y^2+z^2)\, h\,ds$$

vzdálenost od osy na druhou

$$I_y = \int_C (x^2+z^2)\, h\cdot ds$$

$$I_z = \int_C (x^2+y^2)\cdot h\cdot ds$$

<u>Příklad</u>: Nalezněte těžiště křivky složené ze tří čtvrtkružnic – dle obrázku – ležících v souřadných rovinách. Délková hustota $h(x,y,z)=1$



$$m = h \cdot l = 3 \cdot \tfrac{1}{2}\pi R = \tfrac{3}{2}\pi R$$

$$\boxed{x_T = y_T = z_T} \quad \text{(symetrie)}$$

$$x_T = \frac{1}{m}\int_C x \cdot h\, ds = \frac{2}{3\pi R}\int_C x\, ds = \frac{2}{3\pi R}\cdot 2R^2 = \boxed{\frac{4}{3\pi}R} = y_T = z_T$$

$$\int_C x\, ds = \int_{C_1} x\, ds + \int_{C_2} x\, ds + \int_{C_3} x\, ds = R^2 + R^2 = 2R^2$$

$$\int_{C_1} x\, ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} R\cos t\, R\, dt = R^2 [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = R^2$$

$x = R\cos t \quad x' = -R\sin t \qquad t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \qquad ds = R\,dt$

$y = R\sin t \quad y' = R\cos t$

$z = 0$

$$\int_{C_2} x\, ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} R\cos t\, R\, dt = R^2$$

$x = R\cos t \qquad t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$

$y = 0$

$z = R\sin t$

$$\int_{C_3} x\, ds = 0$$

$x = 0$

$y = R\cos t \qquad t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$

$z = R\sin t$