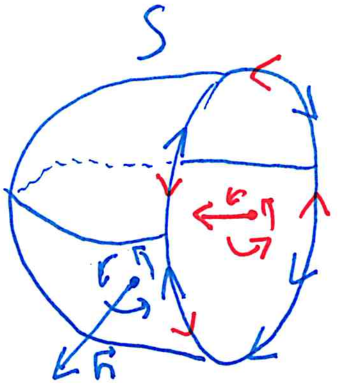
Integrální věty



Orientace okraje plochy ve shodě s orientací plochy

Stokesova věta: Buď S plocha s okrajem orientovaná normálou $\vec{n}$, jejíž okraj tvoří jednoduchá po částech hladká uzavřená křivka c orientovaná ve smyslu orientace plochy S. Nechť je dáno vektorové pole $\vec{a}$:
$\vec{a}(x,y,z) = u(x,y,z)\,\vec{\imath} + v(x,y,z)\,\vec{\jmath} + w(x,y,z)\,\vec{k}$, přičemž u, v, w mají spojité parciální derivace na S i na c. Pak

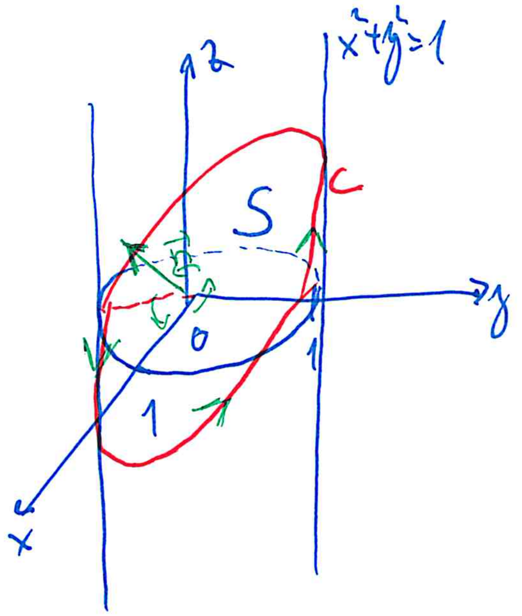
$$\boxed{\int_c \vec{a}\cdot d\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot}\vec{a}\cdot\vec{n}\,dS}$$

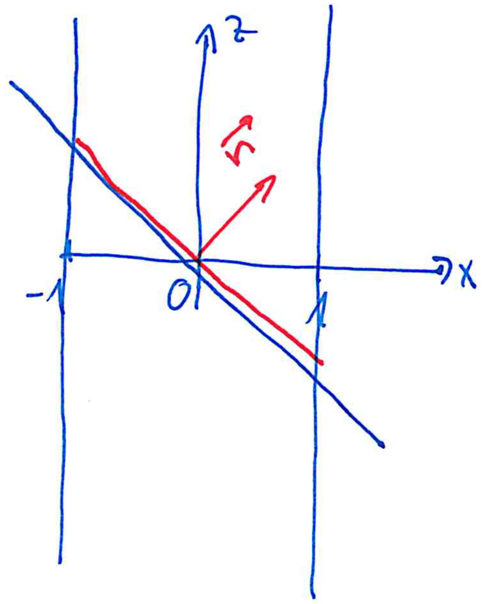
Příklad: Spočítejte $\int_C \vec{a}\cdot d\vec{r}$, kde

$\vec{a} = (y+z,\ x+z,\ x+y)$ a c je uzavřená křivka $x^2+y^2=1$ a $x+z=0$

$z=-x$

je orientovaná souhlasně s $\vec{n}=(1,0,1)$





$$\int_C \vec{a}\cdot d\vec{r} = \int_c (y+z)\,dx + (x+z)\,dy + (x+y)\,dz =$$

$x=\cos t$ $\quad t\in\langle 0,2\pi\rangle$ $\quad dx = -\sin t\,dt$

$y=\sin t$ $\quad dy = \cos t\,dt$

$z=-\cos t$ $\quad dz = \sin t\,dt$

$$= \int_0^{2\pi} (\cancel{\sin t} - \cos t)(-\sin t)\,dt + (\overbrace{\cos t - \cos t}^{0})\cos t\,dt + (\cos t \overset{+}{\vee} \cancel{\sin t})\sin t\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} 2\sin t\cos t\,dt = \int_0^{2\pi} \sin 2t\,dt = 0$$

Stokesova věta:

$$\oint_C \vec{a}\cdot d\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot}\vec{a}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_S \vec{o}\cdot\vec{n}\,dS = 0$$

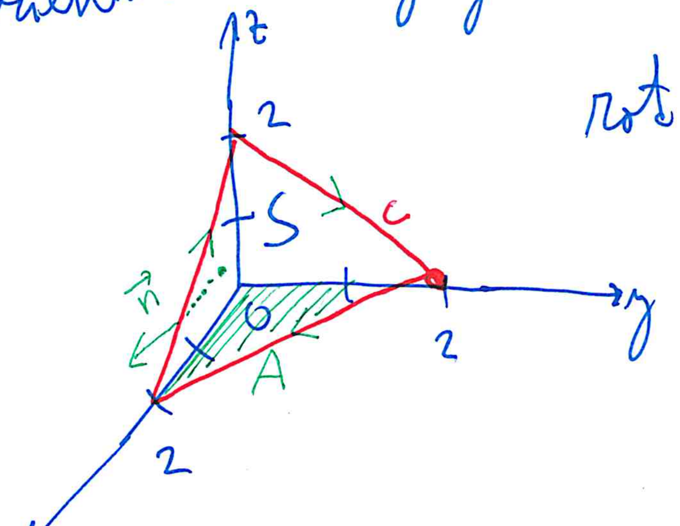
$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+z & x+z & x+y \end{vmatrix} = \vec{i}(1-1)+\vec{j}(1-1)+\vec{k}(1-1) =$$

$$\begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{array}$$

$$= \vec{o}$$

Příklad 2: $\vec{a} = (y^2, z^2, x^2)$ c je obvod Δ s vrcholy $[2,0,0], [0,2,0], [0,0,2]$

Orientace křivky je souhlasná s $\vec{n} = (-1,-1,-1)$



$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & z^2 & x^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\cdot 0 + \vec{j}\cdot 0 + \vec{k}\cdot 0 - (\vec{i}\,2z + \vec{j}\,2x + \vec{k}\,2y) =$$

$$= (-2z, -2x, -2y)$$

$$\int_C \vec{a}\cdot d\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot}\vec{a}\cdot\vec{n}\,dS = (*)$$

plocha: $z = 2-x-y$ (rovina obsahující Δ)

$$F(x,y,z) = 2-x-y-z = 0$$

$$\operatorname{grad} F = (-1,-1,-1)$$

$$(*) = \iint_A \underbrace{\big(2x+2y-4,\ -2x,\ -2y\big)}_{\vec{a},\ z=2-x-y}\cdot\underbrace{(-1,-1,-1)}_{\overrightarrow{\operatorname{grad}F}}\,dx\,dy =$$

$$= \iint_A \left(4-\cancel{2x}-\cancel{2y}+\cancel{2x}+\cancel{2y}\right)dx\,dy = 4\iint_A 1\,dx\,dy = 4S_A = 8$$

Pro pole $\vec{a} = u(x,y,z)\,\vec{i} + v(x,y,z)\,\vec{j} + w(x,y,z)\,\vec{k}$, kde u,v,w mají spojité parciální derivace na otevřené množině M, definujeme divergenci pole $\vec{a}$ jako funkci tří proměnných

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = (\vec{\nabla}\cdot\vec{a})$$

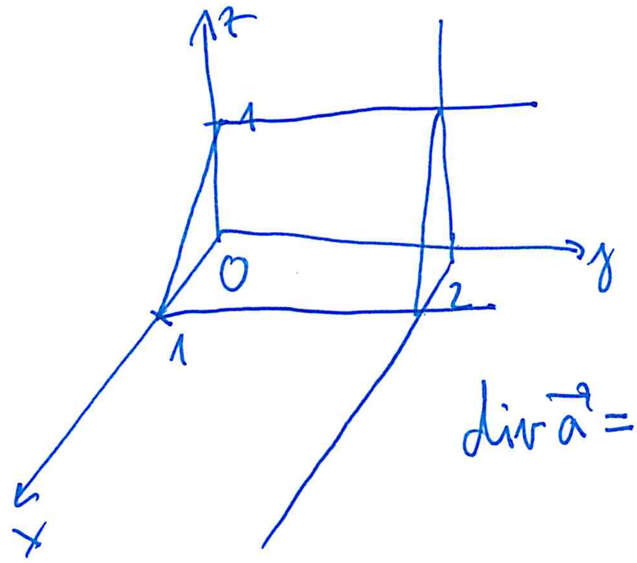
Uzavřená plocha je hranice množiny, přes kterou lze počítat trojný integrál – povrch tělesa.

Gaussova věta: Buď G těleso, jehož hranici tvoří uzavřená plocha S orientovaná jednotkovým vektorem vnější normály $\vec{n}$. Buď dále $\vec{a} = u(x,y,z)\,\vec{i} + v(x,y,z)\,\vec{j} + w(x,y,z)\,\vec{k}$ vektorové pole takové, že $\operatorname{div}\vec{a}$ je spojitá funkce na G i S. Potom

$$\boxed{\iint_S \vec{a}\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_G \operatorname{div}\vec{a}\,dx\,dy\,dz}$$

Příklad: Vypočtěte tok pole $\vec{a}$ vnější stranou uzavřené plochy S:

1) $\vec{a} = (3x+y,\ 2y-z+5,\ x+2y+z)$ a S je povrch tělesa A omezeného $x=0, y=0, z=0, y=2, z=1-x$



$$\iint_S \vec{a}\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_A \operatorname{div}\vec{a}\,dx\,dy\,dz \overset{(*)}{=}$$

$$\operatorname{div}\vec{a} = 3+2+1 = 6$$

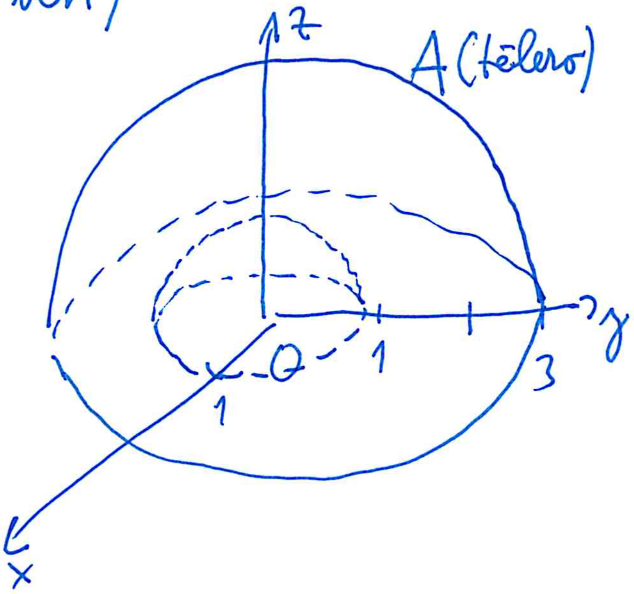
$$\overset{(*)}{=} \iiint_A 6\,dx\,dy\,dz = 6\iiint_A 1\,dx\,dy\,dz = 6\cdot V = \underline{\underline{6}}$$

$\vec{a} = (xy^2, yz^2, zx^2)$ a plocha $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ (orientace ven)

$S_1: x^2+y^2+z^2 = 1, z \geq 0$

$S_2: x^2+y^2+z^2 = 9, z \geq 0$

$S_3: 1 \leq x^2+y^2 \leq 9, z = 0$



$\operatorname{div} \vec{a} = y^2+z^2+x^2$

$$\iint_S \vec{a}\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_A \operatorname{div}\vec{a}\,dx\,dy\,dz = \iiint_A \underbrace{(x^2+y^2+z^2)}_{r^2}\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint_A r^2 r^2 \sin\vartheta \, dr\, d\varphi\, d\vartheta = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_1^3 r^4 \sin\vartheta\, dr\right)d\vartheta\right]d\varphi \overset{*}{=}$$

$x = r\cos\varphi\sin\vartheta$ $\quad 1 \leq r \leq 3$

$y = r\sin\varphi\sin\vartheta$ $\quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$z = r\cos\vartheta$ $\quad 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$

$$\overset{*}{=} \int_0^{2\pi} \frac{242}{5}\,d\varphi = \boxed{\frac{484}{5}\pi}$$

$$\int_1^3 r^4\,dr = \left[\frac{r^5}{5}\right]_1^3 = \frac{3^5-1}{5} = \frac{242}{5}$$

$$\frac{242}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta\,d\vartheta = \frac{242}{5}\left[-\cos\vartheta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{242}{5}$$