PŘÍKLAD: $y'' - 4y = 4x^2$

1) $y'' - 4y = 0$

predpokladáme $y = e^{\lambda x}$ je riešením

$$\left.\begin{aligned} y &= e^{\lambda x} \\ y' &= \lambda e^{\lambda x} \\ y'' &= \lambda^2 e^{\lambda x} \end{aligned}\right\} \text{dosadíme do rovnice}$$

$$\lambda^2 e^{\lambda x} - 4e^{\lambda x} = 0 \quad / : e^{\lambda x}$$

$$\lambda^2 - 4 = 0 \quad \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases} \rightarrow y_1 = e^{2x} \quad y_2 = e^{-2x}$$

$$y_H = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$$

2) $y'' - 4y = 4x^2$

$$y_p = Ax^2 + Bx + C$$

$$y_p' = 2Ax + B$$

$$y_p'' = 2A$$

dosadení: $\underline{2A} - \underline{4Ax^2} - \underline{4Bx} \, \underline{-4C} = \underline{4x^2} + \underline{0x} + 0$

u x^2: $-4A = 4 \rightarrow A = -1$

u x: $-4B = 0 \rightarrow B = 0$ $\qquad y_p = -x^2 - \frac{1}{2}$

u x^0: $2A - 4C = 0 \rightarrow 4C = -2 \rightarrow C = -\frac{1}{2}$

$4C = 2A$

$$\boxed{y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - x^2 - \frac{1}{2}}$$

Lineární soustava obyč. dif. rovnic 1. řádu

$$y_1'(x) = a_{11}(x) \cdot y_1(x) + a_{12}(x) y_2(x) + \ldots + a_{1n}(x) y_n(x) + b_1(x)$$

$$y_2'(x) = a_{21}(x) \cdot y_1(x) + a_{22}(x) \cdot y_2(x) + \ldots + a_{2n}(x) y_n(x) + b_2(x)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$y_n'(x) = a_{n1}(x) \cdot y_1(x) + a_{n2}(x) \cdot y_2(x) + \ldots + a_{nn}(x) \cdot y_n(x) + b_n(x)$$

kde $y_1, y_2, \ldots, y_n$ jsou neznámé funkce $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$

$a_{11}, \ldots a_{nn}$ jsou funkce $A = \begin{bmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \ldots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \ldots & a_{2n}(x) \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \ldots & a_{nn}(x) \end{bmatrix}$

$b_1, \ldots, b_n$ jsou funkce $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{bmatrix}$

$$\boxed{\vec{y}\,' = A \cdot \vec{y} + \vec{b}}$$

Nechť maticová funkce A a sloupec $\vec{b}$ jsou spojité na otevřeném intervalu I. Potom pro každý bod $[x_0, \vec{y_0}] \in I \times R^n$ má Cauchyova úloha

$$\vec{y}\,' = A.\vec{y} + \vec{b} \quad \text{s podmínkou } \vec{y}(x_0) = \vec{y_0}$$

právě jedno řešení na I.

Pro $\vec{b} = \vec{o}$, soustava $\vec{y}\,' = A.\vec{y}$ se nazývá homogenní. Všechna řešení $\vec{y}\,' = A.y$ tvoří prostor dimenze n (A je matice $n \times n$)

→ Pro řešení hom. soustavy s maticí $n \times n$ potřebujeme najít n lin. nezávislých řešení.
(tzv. fundamentální systém)

Řešení HLSODR 1. řádu s konst. koef.

→ matice A je číselná matice

$$\vec{y}\,' = A\vec{y} \quad (*)$$

předpokládáme řešení ve tvaru $\boxed{\vec{y} = e^{\lambda x}\vec{v}}$, kde λ je nějaké číslo a $\vec{v}$ je číselný vektor.

Spočítáme derivaci: $\vec{y}\,' = \lambda e^{\lambda x}\vec{v}$

a dosadíme do $(*)$:

$$\lambda e^{\lambda x}\vec{v} = A e^{\lambda x}\vec{v} \quad /: e^{\lambda x}$$

$$\lambda\vec{v} = A\cdot\vec{v}$$

tj. λ je vlastní číslo matice A a $\vec{v}$ je vlastní vektor matice A příslušný k λ.

(5)

$$y_1' = 3y_1 + 2y_2 \qquad \vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \rightarrow \vec{y}\,' = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \vec{y}$$

$$y_2' = y_1 + 4y_2$$

hledáme vl. čísla a vl. vektory $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 4-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda)(4-\lambda) - 2 = 0$$

$$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$

$$(\lambda-2)(\lambda-5) = 0 \quad \text{vl. čísla} \quad \lambda_1 = 2, \ \lambda_2 = 5$$

pro $\lambda_1 = 2$: $(A - 2E)\vec{u} = \vec{o}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x + 2y &= 0 \\ y &= t \ (t \in \mathbb{R}) \\ x &= -2t \end{aligned} \qquad \vec{u}_1 = \begin{bmatrix} -2t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

pro $\lambda_2 = 5$: $(A - 5E) \cdot \vec{u} = \vec{o}$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x - y &= 0 \\ x = y &= r \ (r \in \mathbb{R}) \end{aligned} \qquad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} r \\ r \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{y}_1 = e^{2x} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2e^{2x} \\ e^{2x} \end{bmatrix} \begin{array}{l} y_1 \\ y_2 \end{array} \qquad \vec{y}_2 = e^{5x} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{5x} \\ e^{5x} \end{bmatrix}$$

OBECNÉ ŘEŠENÍ $\vec{y} = c_1 \vec{y}_1 + c_2 \vec{y}_2 = c_1 \begin{bmatrix} -2e^{2x} \\ e^{2x} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} e^{5x} \\ e^{5x} \end{bmatrix}$

Příklad: $\vec{y}' = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}}_{B} \vec{y}$

vl. čísla a vl. vektory:

$$\det(B-\lambda E) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & -1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda)+2 = 0$$

$$\lambda^2+1=0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i$$

pro $\lambda_1 = i$: $\begin{bmatrix} 1-i & 2 \\ -1 & -1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1-i & 2 \\ -1 & -1-i \end{bmatrix} (1-i) \sim \begin{bmatrix} 1-i & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (1-i)\cdot x + 2y = 0$$

$$x = t \quad (t \in \mathbb{C})$$

$$(1-i)(-1-i) = -1+i-i-1 = -2 \qquad y = t\,\frac{i-1}{2}$$

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} t \\ t\,\frac{i-1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{pro } t=2 \quad \vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ i-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix}$$

pro $\lambda_2 = -i$ $\quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix}$

$\vec{y} = e^{\lambda x}\vec{v}$ $\qquad$ $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

$$\vec{y}_1 = e^{ix}\left(\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\i\end{bmatrix}\right) = (\cos x + i\sin x)\left(\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\i\end{bmatrix}\right)$$

$$\vec{y}_2 = e^{-ix}\left(\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\i\end{bmatrix}\right) = (\cos x - i\sin x)\left(\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\i\end{bmatrix}\right)$$

$$\vec{y}_1 + \vec{y}_2 = 2\cos x\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} + 2i\sin x\begin{bmatrix}0\\i\end{bmatrix} = \boxed{2\cos x\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} - 2\sin x\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}}$$

$$\vec{y}_1 - \vec{y}_2 = 2\cos x\begin{bmatrix}0\\i\end{bmatrix} + 2i\sin x\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} = i\left(2\cos x\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} + 2\sin x\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}\right)$$

$$-i(\vec{y}_1 - \vec{y}_2) = \boxed{2\cos x\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} + 2\sin x\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}}$$

$$\boxed{\frac{\vec{y}_1 + \vec{y}_2}{2}\ ,\quad \frac{(\vec{y}_2 - \vec{y}_1)i}{2}}$$

$$y' = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} y$$

$$\det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda)+1=0$$

$$\lambda^2-4\lambda+4=0$$

$$(\lambda-2)^2=0$$

$$\lambda_{1,2}=2$$

pro $\lambda_{1,2}=2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad x+y=0 \qquad \vec{u}=t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y=t$$

$$x=-t$$

$$\vec{y_1}=e^{2x}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{y_2}=?$$