(1)

Pro $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ $1 \le k \le n$ lin. nezávislé vlastní vektory matice $A_{(n \times n)}$ příslušné ne nutně různým vlastním číslům $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ jsou

$$\vec{y}_1 = \vec{v}_1 \cdot e^{\lambda_1 x}, \; \vec{y}_2 = \vec{v}_2 \cdot e^{\lambda_2 x}, \dots, \; \vec{y}_k = \vec{v}_k \cdot e^{\lambda_k x}$$

lin. nezávislá řešení soustavy $A \cdot \vec{y} = \vec{y}'$

Problém: potřebujeme najít n lin. nezávislých řešení. Vlastních vektorů ale může být méně.

$\vec{y}' = A \cdot \vec{y}$? existuje e^{Ax} a $(e^{Ax})' = Ae^{Ax}$

potom $e^{Ax} \cdot \vec{v}$ je řešení soustavy pro libovolný vektor $\vec{v}$

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

Definujeme: pro A typu $n\times n$

$$e^{A} = E + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!}A^i$$

e^{A} je matice $n\times n$

potom platí $\left(e^{Ax}\right)' = A e^{Ax}$

$$e^{A+B} = e^{A}\cdot e^{B} \quad \text{pouze pro } A\cdot B = B\cdot A$$

1) $$e^{\lambda E x}\cdot \vec{v} = \left(E\cancel{x} + \frac{1}{1!}\lambda E x + \frac{1}{2!}\lambda^2 E x^2 + \frac{1}{3!}\lambda^3 E x^3 + \dots\right)\cdot \vec{v} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{1!}\lambda x + \frac{1}{2!}(\lambda x)^2 + \frac{1}{3!}(\lambda x)^3 + \dots\right)\cdot E\cdot \vec{v} = e^{\lambda x}\cdot \vec{v}$$

2) $$e^{Ax}\cdot \vec{v} = e^{(A-\lambda E)x + \lambda E x}\cdot \vec{v} = e^{(A-\lambda E)x}\cdot e^{\lambda E x}\,\vec{v} =$$

$$= e^{(A-\lambda E)\cdot x}\, e^{\lambda x}\,\vec{v} =$$

$$= e^{\lambda x}\left(E + \frac{x}{1!}(A-\lambda E) + \frac{x^2}{2!}(A-\lambda E)^2 + \frac{x^3}{3!}(A-\lambda E)^3 + \dots\right)\cdot \vec{v} =$$

$$= e^{\lambda x}\left(E\cdot\vec{v} + \frac{x}{1!}\underbrace{(A-\lambda E)\vec{v}}_{0} + \frac{x^2}{2!}\underbrace{(A-\lambda E)^2\cdot\vec{v}}_{0} + \frac{x^3}{3!}\underbrace{(A-\lambda E)^3\vec{v}}_{0} + \dots\right)$$

pro λ vl. číslo a $\vec{v}$ příslušný vlastní vektor

Návod: 1) Nalezneme všechny vl. čísla a příslušné vl. vektory matice A a sestavíme řešení ve tvaru

$$\vec{y}_i = e^{\lambda_i x} \cdot \vec{v}_i$$

2) Nemám-li po tomto kroku dost řešení, hledáme tzv. zobecněné vlastní vektory. Pro vlastní číslo λ, jehož geom. náš. < alg. násob. hledáme

$$(A-\lambda E)^2 \cdot \vec{v} = \vec{o} \quad \text{přičemž} \quad (A-\lambda E)\cdot\vec{v} \neq \vec{o}.$$

z toho získáme řešení soustavy ve tvaru

$$\vec{y} = e^{\lambda x}\left(E + \frac{1}{1!}x(A-\lambda E)\right)\vec{v}$$

3) Pokud stále nemáme dost řešení

$$(A-\lambda E)^3 \cdot \vec{v} = \vec{o} \quad \text{přičemž} \quad (A-\lambda E)^2 \cdot \vec{v} \neq \vec{o}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{y} = e^{\lambda x}\left(E + \frac{x}{1!}(A-\lambda E) + \frac{x^2}{2!}(A-\lambda E)^2\right)\cdot\vec{v}$$

4) atd. dokud nemáme n lin. nezávislých řešení.

$$\vec{y}' = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \vec{y}$$

1) vl. čísla a vl. vektory

$$\det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda)+1 = (\lambda-2)^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 2$$

vl. vektor pro $\lambda_{1,2} = 2$

$$(A-\lambda E)\vec{u} = \vec{o} : \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad x+y=0 \rightarrow \vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

dostáváme řešení $\boxed{\vec{y}_1 = e^{2x} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}$

2) zobecněný vl. vektor: $(A-\lambda E)^2 \cdot \vec{u} = \vec{o}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

za zobecněný vl. vektor můžeme zvolit cokoliv, co není násobkem vl. vektoru $\quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\vec{y}_2 = e^{2x} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{2x} \begin{bmatrix} 1+x & x \\ -x & 1-x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= e^{2x} \begin{bmatrix} 1+x+x \\ -x+1-x \end{bmatrix} = \boxed{e^{2x} \begin{bmatrix} 1+2x \\ 1-2x \end{bmatrix} = \vec{y}_2}$$

Soustava $\vec{y}\,' = A\vec{y} + \vec{b}$

$$\vec{y}\,' - A\vec{y} = \vec{b}$$

Jsou-li složky $\vec{b}$ funkce ve speciálním tvaru, řešíme metodou neurčitých koeficientů.

připomenutí: (pro jednu dif. rovnici)

$$b(x) = e^{\alpha x}\left(P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x\right)$$

hledáme y_p ve tvaru

$$y_p = e^{\alpha x}\cdot x^K\left(R(x)\cos\beta x + S(x)\sin\beta x\right), \text{ kde}$$

α, β známe ze zadání

K je násobnost $\alpha + i\beta$ jako kořene char. rovnice

R, S jsou polynomy s neurčitými koeficienty stupně, který je roven většímu ze stupňů P a Q.

Jsou-li v $\vec{b}$ všechny složky stejného typu, použijeme na každou složku výše uvedený vzorec.

Jinak použijeme tzv. princip superpozice.

pro matici A s vl. čísly $\lambda_1=1$ a $\lambda_2=2$

a $\vec{b} = \begin{bmatrix} e^{3x} \\ 2e^{3x} \end{bmatrix}$ $\quad \vec{y}_p = \begin{bmatrix} Ae^{3x} \\ Be^{3x} \end{bmatrix}$

$\vec{b} = \begin{bmatrix} e^{2x} \\ e^{2x} \end{bmatrix}$ $\quad \vec{y}_p = \begin{bmatrix} Axe^{2x} \\ Bxe^{2x} \end{bmatrix}$ $(k=1)$

$\vec{b} = \begin{bmatrix} e^{2x} \\ e^{3x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2x} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ e^{3x} \end{bmatrix}$ a řešíme 2x a výsledky sečteme

---

$$\vec{y}\,' = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \vec{y} + \begin{bmatrix} x \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{y}(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

1) $\vec{y}\,' = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \vec{y}$ (přidružená homog. soustava)

$$0 = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 2 & -2-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)(-2-\lambda)+4 = \lambda^2-\lambda-2 =$$

$$= (\lambda+1)(\lambda-2) = 0 \quad \lambda_1=-1, \ \lambda_2=2$$

vl. vektor $\lambda_1=-1$

$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad 2x-y=0$, $2x=y$ $\quad \vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

pro $\lambda_2=2$

$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ $\quad x-2y=0$ $\quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Fund. systém: $\vec{y}_1 = e^{-x}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$, $\vec{y}_2 = e^{2x}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$

$$\vec{y}_H = c_1\vec{y}_1 + c_2\vec{y}_2 = c_1 e^{-x}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + c_2 e^{2x}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

---

2) $\vec{y}\,' = \begin{bmatrix}3 & -2\\2 & -2\end{bmatrix}\vec{y} + \begin{bmatrix}x\\3\end{bmatrix}$

hledáme $\vec{y}_p$ ve tvaru $\vec{y}_p = \begin{bmatrix}Ax+B\\Cx+D\end{bmatrix}$ $\vec{y}_p\,' = \begin{bmatrix}A\\C\end{bmatrix}$

dosadíme $\vec{y}_p$ do soustavy:

$$\begin{bmatrix}A\\C\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & -2\\2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Ax+B\\Cx+D\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}x\\3\end{bmatrix}$$

1. složka: $A = 3(Ax+B) - 2(Cx+D) + x$

2. složka: $C = 2(Ax+B) - 2(Cx+D) + 3$

1. složka: u x: $0 = 3A - 2C + 1$

u x^0: $A = 3B - 2D$

2. složka: u x: $0 = 2A - 2C$

u x^0: $C = 2B - 2D + 3$

1.r − 3r: $0 = A + 1$

$A = -1$

$C = -1$

2.r: $-1 = 3B - 2D$

4.r: $-1 = 2B - 2D + 3$

2.r. − 4.r: $0 = B - 3 \rightarrow B = 3$

$D = 5$

$$\vec{y}_p = \begin{bmatrix} Ax + B \\ Cx + D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - x \\ 5 - x \end{bmatrix}$$

$$\vec{y} = \vec{y}_H + \vec{y}_p = C_1 e^{-x} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + C_2 e^{2x} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 - x \\ 5 - x \end{bmatrix}$$

3) podmínka $\vec{y}(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$C_1 + 2C_2 = +1 \quad / -2$

$2C_1 + C_2 = 2$

$-3C_2 = 0 \rightarrow C_2 = 0$

$\underline{\underline{C_1 = 1}}$

$$\vec{y} = e^{-x} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 - x \\ 5 - x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-x} + 3 - x \\ 2e^{-x} + 5 - x \end{bmatrix}$$