Laplaceova transformace

~~Pro~~ funkci $f(t)$ (tzv. předmět) definovanou na $(0,+\infty)$

přiřazujeme

$$F(s)=\mathcal{L}(f(t))=\int_0^{+\infty} f(t)\cdot e^{-st}\,dt \quad \text{(tzv. Laplaceův obraz)}$$

a obráceně $f(t)=\mathcal{L}^{-1}(F(s))$ (tzv. zpětná transformace)

---

integrál existuje pro $f(t)$, která má na $(0,+\infty)$ konečný počet nespojitostí takových, že v těchto bodech existují jednostranné limity a jsou konečné a existují kladná čísla M, α, t_0 taková, že pro každé $t > t_0$ je $f(t) \leq M\cdot e^{\alpha t}$

Hledáme Laplaceův obraz $f(t)=1$

$$\mathcal{L}(1)=\int_0^{+\infty} 1\cdot e^{-st}\,dt=\lim_{A\to+\infty}\int_0^A e^{-st}\,dt=$$

$$=\lim_{A\to+\infty}\left[\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^{+A}=\lim_{A\to+\infty}-\frac{1}{s}\Big(\underbrace{e^{-sA}}_{\to 0}-1\Big)=\frac{1}{s}$$

$$f(t)=e^{-t}$$

$$\mathcal{L}(e^{-t})=\int_0^{+\infty} e^{-t}e^{-st}\,dt=\lim_{A\to+\infty}\int_0^A e^{-t(1+s)}\,dt=$$

$$=\lim_{A\to+\infty}\frac{-1}{1+s}\left[e^{-t(1+s)}\right]_0^A=\frac{1}{1+s}$$

1) Linearita: $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$$\mathcal{L}(\alpha f+\beta g)=\alpha\mathcal{L}(f)+\beta\mathcal{L}(g)$$

Hledáme obrazy

$$\mathcal{L}(1+3t^2) = \mathcal{L}(1) + 3\,\mathcal{L}(t^2) = \frac{1}{s} + 3\frac{2}{s^3}$$

slovník: $\mathcal{L}\left(\frac{t^{\overset{n-1=2}{2}}}{\underset{(n-1)!}{2!}}\right) = \frac{1}{s^{\underset{n=3}{3}}}$

$\Downarrow$

$$\mathcal{L}(t^2) = \frac{2}{s^3}$$

$$\mathcal{L}(\sin 2t) = \frac{2}{s^2+4}$$

$$\mathcal{L}(\cos 5t) = \frac{s}{s^2+25}$$

a obráceně hledáme předmět pro vzor

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \sin t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+9)^2}\right) = \frac{t\sin 3t}{6}$$

Pracujeme s funkcemi, jejichž obrazy jsou racionální funkce. Pro zpětnou transformaci racionální funkce 1) hledáme ve slovníku

(pokud nenajdeme)

↓

2) rozklad na parciální zlomky

Posunutí v obraze : Pro $a>0$ a $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$

je $\mathcal{L}\left(e^{-at} f(t)\right) = F(s+a)$

Protože $\mathcal{L}(\cos 3t) = \dfrac{s}{s^2-9}$ je

$s \to s+2$

$$\mathcal{L}\left(e^{-2t} \cdot \cos 3t\right) = \frac{s+2}{(s+2)^2-9}$$

(lze najít přímo i ve slovníku)

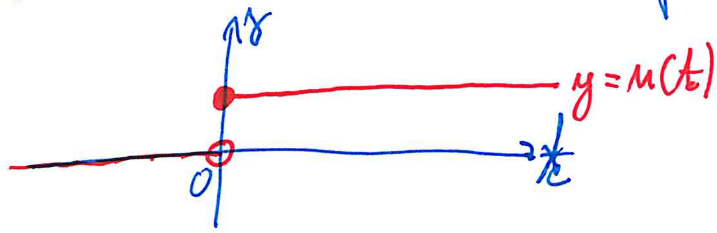
Posunutí v předmětu; pro $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$ je

$$\mathcal{L}\Big(f(t-a)\cdot u(t-a)\Big) = e^{-as}F(s)$$

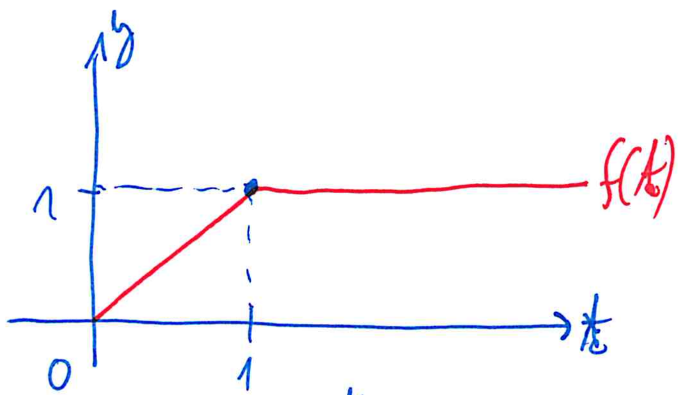
$u(t) = 0 \quad t < 0$

$u(t) = 1 \quad t \geq 0$

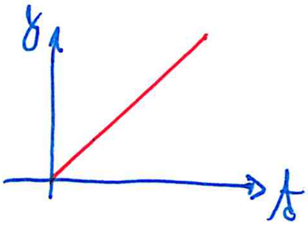
Heavisidova schodovitá funkce



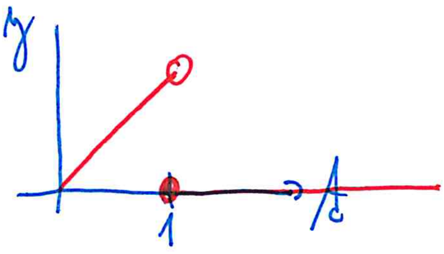
Příklad:



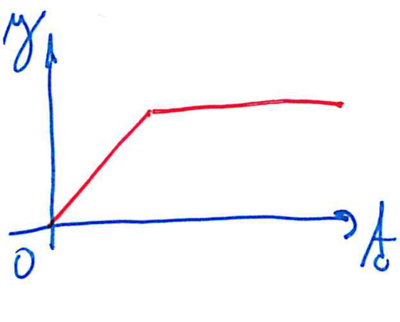
$f(t) = t$



$f(t) = t - t\,u(t-1)$



$f(t) = t - t\,u(t-1) + u(t-1)$

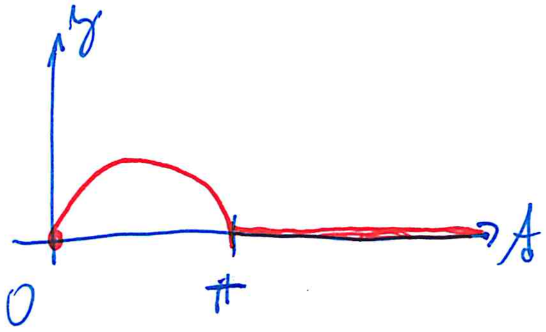


$f(t) = t - u(t-1)\cdot(t-1)$

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2}e^{-s}$$

$$t \qquad\qquad (t-1)\,u(t-1)$$

Příklad:



$f(t) = \sin t \quad t \in (0, \pi>$

$f(t) = 0$ pro $t > \pi$

$$f(t) = \sin t - \sin t \cdot u(t-\pi)$$

$$\sin(t-\pi) = -\sin t$$

$$\downarrow$$

$$f(t) = \sin t + \sin(t-\pi)\,u(t-\pi)$$

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1}e^{-\pi s}$$

Obraz derivace

Nechť $f(t)$ a $f'(t)$ jsou předměty standardního typu a $f(t)$ je spojitá na $(0,+\infty)$. Označíme-li $F(s)=\mathcal{L}(f(t))$ a $f(0+)=\lim\limits_{t\to 0^+} f(t)$ platí

$$\mathcal{L}(f'(t)) = s\cdot F(s) - f(0+)$$

pro 2. derivaci:

$$\mathcal{L}(f''(t)) = s\left(sF(s) - f(0+)\right) - f'(0+) =$$
$$= s^2F(s) - s\,f(0+) - f'(0+)$$

Použití L.T pro řešení dif. rovnic a jejich soustav.

$$y'' + 4y = \cos t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

$$\mathcal{L}(\cos t) = \frac{s}{s^2+1}$$

$$\mathcal{L}(y) = Y$$

$$\mathcal{L}(y'') = s^2 Y - s \cdot 0 - 0 = s^2 Y$$

obraz rovnice:

$$s^2 Y + 4Y = \frac{s}{s^2+1}$$

$$(s^2+4) \cdot Y = \frac{s}{s^2+1}$$

$$Y = \frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

$$y = \frac{\cos t - \cos 2t}{3}$$

9) $y'' + y = f(t)$, kde $f(t) = \sin t$ pro $t \in (0, \pi\rangle$

$f(t) = 0$ pro $t > \pi$

$y(0) = 0,\ y'(0) = 0$

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} e^{-\pi s}$$ (viz str. 6)

$$\mathcal{L}(y) = Y$$

$$\mathcal{L}(y'') = s^2 Y - s.0 - 0 = s^2 Y$$

obraz rovnice

$$s^2 Y + Y = \frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} e^{-\pi s}$$

$$(s^2+1)\cdot Y = \frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} e^{-\pi s} \quad / :(s^2+1)$$

$$Y = \frac{1}{(s^2+1)^2} + \frac{1}{(s^2+1)^2} e^{-\pi s}$$

$$y = \frac{1}{2}(\sin t - t\cdot\cos t) + \frac{1}{2}\left[\sin(t-\pi) - (t-\pi)\cos(t-\pi)\right]\cdot u(t-\pi)$$