INTEGRÁLNÍ VĚTY

STOKESOVA VĚTA

- převádí výpočet plošného integrálu 2. druhu na ploše na výpočet křivkového integrálu na jejím okraji

nechť S je plocha s okrajem orientovaná jedn. vektorem n normály, okraj tvoří jednoduchá po částech hladká uzavřená křivka C, $a(x,y,z) = u(x,y,z)\cdot i + v(x,y,z)\cdot j + w(x,y,z)\cdot k$, kde u, v, w mají spojité parciální derivace na otevřené množině obsahující S a C. Pdk

$$\iint_S \operatorname{rot} a \cdot n \, dS = \int_C a \, dr,$$

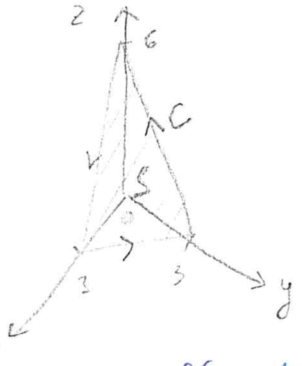
kde křivka C je orientovaná ve smyslu orientace plochy S.

- tok vektoru $\operatorname{rot} a$ plochou S je roven cirkulaci vektoru a po jejím okraji C

PŘÍKLAD

Vypočtěte užitím Stokesovy věty $\int_C a\,dr$, kde:

a) $a(x,y,z) = -y^2\cdot i + z\cdot j + x\cdot k$, S je část roviny $2x+2y+z=6$ ležící v 1. oktantu, orientovaná podle obr., C je okraj plochy S orientovaný ve smyslu orientace S



$$\operatorname{rot} a = (w_y' - v_z')\cdot i + (u_z' - w_x')\cdot j + (v_x' - u_y')\cdot k$$

$$z = 6 - 2x - 2y$$

$$A: \; 0 \le x \le 3, \quad 0 \le y \le 3 - x$$

$$\int_C a\,dr = \iint_S \operatorname{rot} a \cdot n\, dS = \iint_A [(0-1)\cdot i + (0-1)\cdot j + (0+2y)\cdot k]\cdot$$

$$\cdot (2,2,1)\,dxdy = \iint_A (-1,-1,2y)\cdot(2,2,1)\,dxdy = \int_0^3\int_0^{3-x} (-2-2+2y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^3\int_0^{3-x} (2y-4)\,dy\,dx = \int_0^3 \left[2\frac{y^2}{2} - 4y\right]_0^{3-x} dx = \int_0^3 \left[y^2 - 4y\right]_0^{3-x} dx =$$

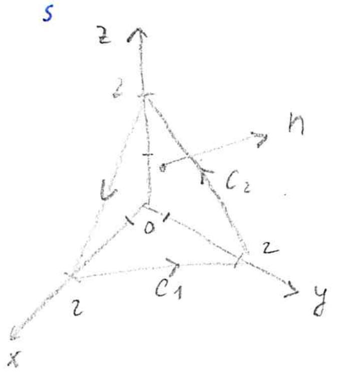
$$= \int_0^3 [(3-x)^2 - 4(3-x)]\,dx = \int_0^3 (9 - 6x + x^2 - 12 + 4x)\,dx = \int_0^3 (x^2 - 2x - 3)\,dx =$$

(1)

$= \left[\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} - 3x\right]_0^3 = 9 - 9 - 9 = -9$

b) $a(x,y,z) = 2z\cdot i - y\cdot j + x\cdot k$, S je trojúhelník o vrcholech $[2,0,0]$, $[0,2,0]$, $[0,0,2]$ orientován vektorem normály $(1,1,1)$ v bodě $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1]$

$$\iint_S \operatorname{rot} a \cdot n \, dS = \int_C a\, dr = \int_{C_1} a\, dr + \int_{C_2} a\, dr + \int_{C_3} a\, dr$$



$C_1: \; X = [2,0,0] + (-2,2,0)\cdot t$

$x(t) = 2-2t$

$y(t) = 2t$, $t \in \langle 0,1\rangle$

$z(t) = 0$

$C_2: \; X = [0,2,0] + (0,-2,2)\cdot t$

$x(t) = 0$

$y(t) = 2-2t$, $t \in \langle 0,1\rangle$

$z(t) = 2t$

$C_3: \; X = [0,0,2] + (2,0,-2)\cdot t$

$x(t) = 2t$

$y(t) = 0$

$z(t) = 2-2t$

$$\int_{C_1} a\, dr + \int_{C_2} a\, dr + \int_{C_3} a\, dr = \int_0^1 (0,-2t,2-2t)\cdot(-2,2,0)\, dt +$$

$$+ \int_0^1 (4t, 2t-2, 0)\cdot(0,-2,2)\, dt + \int_0^1 (4-4t, 0, 2t)\cdot(2,0,-2)\, dt =$$

$$= \int_0^1 -4t\, dt + \int (-4t+4)\, dt + \int_0^1 (8-8t-4t)\, dt =$$

$$= \left[-4\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + \left[-4\frac{t^2}{2} + 4t\right]_0^1 + \left[8t - 12\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = -2 + 2 + 8 - 6 = 2$$

c) $a(x,y,z) = x^4\cdot i + xy\cdot j + z^4\cdot k$, S jako v (b)

$$\iint_S \operatorname{rot} a \cdot n \, dS = \int_C a\, dr = \int_{C_1} a\, dr + \int_{C_2} a\, dr + \int_{C_3} a\, dr =$$

$$= \int_0^1 ((2-2t)^4, 2t(2-2t), 0)\cdot(-2,2,0)\, dt + \int_0^1 (0,0,16t^4)(0,-2,2)\, dt +$$

$$+\int_0^1 (16t^4, 0, (2-2t)^4)\cdot(2, 0, -2)\,dt = \int_0^1 [-2(2-2t)^4 + 4t(2-2t)]\,dt +$$

$$+\int_0^1 32t^4\,dt + \int_0^1 [32t^4 - 2(2-2t)^4]\,dt = \int_0^1 (-\cancel{32}t^4 + 128t^3 - 200t^2 +$$

$$+136t - 32)\,dt + \int_0^1 3\cancel{2t^4} + \int_0^1 (128t^3 - 192t^2 + 128t - 32)\,dt =$$

$$= \int_0^1 (256t^3 - 392t^2 + 264t - 64)\,dt = \frac{4}{3}$$

DIVERGENČNÍ (GAUSSOVA – OSTROGRADSKÉHO) VĚTA

- převádí plošný integrál 2. druhu na ploše na trojný integrál na tělese, pro které je plocha hranicí

$a(x,y,z) = u\cdot i + v\cdot j + w\cdot z$

divergencí vektorového pole se rozumí funkce

$$\operatorname{div} a = u'_x + v'_y + w'_z$$

nechť G je těleso, jehož hranici tvoří uzavřená plocha S orientovaná jednotkovým vektorem n vnější normály, $a(x,y,z) = u\cdot i + v\cdot j + w\cdot k$ je vektorové pole a $\operatorname{div} a$ je spojitá funkce na otevřené množině obsahující G a S.

Pak

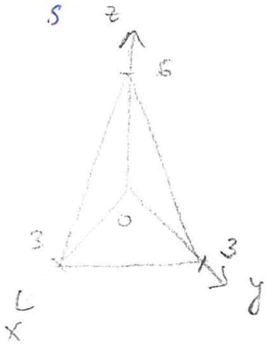
$$\iint_S a\cdot n\,dS = \iiint_G \operatorname{div} a\,dx\,dy\,dz.$$

PŘÍKLAD

Vypočtěte užitím divergenční věty $\iint_S a\,n\,dS$, kde:

a) $a(x,y,z) = x\cdot i + y^2\cdot j + z\cdot k$, kde S je uzavřená plocha, která je hranicí množiny G ohraničené rovinou $2x+2y+z-6=0$ a souřadnicovými rovinami xy, yz, zx

$$\iint_S a\cdot n\,dS = \iiint_G (1+2y+1)\,dx\,dy\,dz = 2\int_0^3\int_0^{3-x}\int_0^{6-2x-2y} (1+y)\,dz\,dy\,dx =$$



$z = 6-2x-2y$

$G:\ 0 \le x \le 3$

$\quad 0 \le y \le 2-x$

$\quad 0 \le z \le 6-2x-2y$

$$= 2\int_0\int_0 \left[z + yz\right]_0 \, dy\,dx = 2\int_0\int_0 \left[6-2x-2y+y(6-2x-2y)\right] dy\,dx =$$

$$= 2\int_0^3\int_0^{3-x}\left(6-2x+4y-2xy-2y^2\right) dy\,dx = 2\int_0^3\left[6y-2xy+2y^2-xy^2-\tfrac{2}{3}y^3\right]_0^{3-x}$$

$$dx = 2\int_0^3\left[6(3-x)-2x(3-x)+2(3-x)^2-x(3-x)^2-\tfrac{2}{3}(3-x)^3\right]dx =$$

$$= 2\int_0^3\left[18-6x-6x+2x^2+18-12x+2x^2-9x+6x^2-x^3-\tfrac{2}{3}(27-27x+9x^2-x^3)\right.$$

$$dx = 2\int_0^3\left(-x^3+10x^2-33x+36-18+18x-6x^2+\tfrac{2}{3}x^3\right)dx =$$

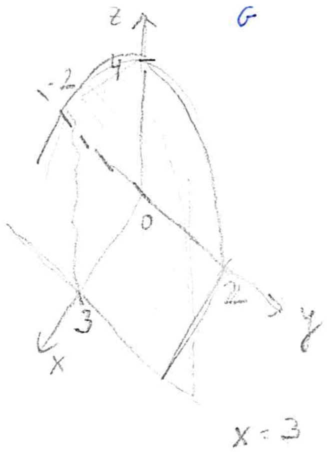
$$= 2\int_0^3\left(-\tfrac{1}{3}x^3+4x^2-15x+18\right)dx = 2\left[-\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{x^4}{4}+4\tfrac{x^3}{3}-\tfrac{15}{2}x^2+18x\right]_0^3 =$$

$$= 2\left(-\tfrac{27}{4}+4\cdot 9-\tfrac{15}{2}\cdot 9+54\right) = -\tfrac{27}{2}+72-135+108 = 180-135-\tfrac{27}{2} =$$

$$= 45-\tfrac{27}{2} = \tfrac{90-27}{2} = \tfrac{63}{2}$$

b) $a(x,y,z) = (z^2-x)\cdot i - xy\cdot j + 3z\cdot k$, kde S je uzavřená plocha ohraničená plochami $z = 4-y^2$, $x=0$, $x=3$, $z=0$ orientovaná vnější normálou

$$\iint_S a\cdot n\,dS = \iiint_G(-1-x+3)\,dx\,dy\,dz = \iiint_G(2-x)\,dx\,dy\,dz =$$



$G: \; 0 \le x \le 3$

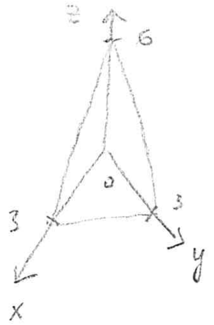
$-2 \le y \le 2$

$0 \le z \le 4-y^2$

$$= \int_0^3\int_{-2}^{2}\int_0^{4-y^2}(2-x)\,dz\,dy\,dx = \int_0^3\int_{-2}^{2}\left[2z-xz\right]_0^{4-y^2}dy\,dx = \int_0^3\int_{-2}^{2}\left[2(4-y^2)-x(4-y^2)\right]dy\,dx$$

$$= \int_0^3\int_{-2}^{2}\left(8-2y^2-4x+xy^2\right)dy\,dx = \int_0^3\left[8y-\tfrac{2}{3}y^3-4xy+x\tfrac{y^3}{3}\right]_{-2}^{2}dx = 16$$

[illegible]
plochami $2x + 2y + z = 6$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ orientovaná
vnější normálou



$$G: \; 0 \le x \le 3$$
$$0 \le y \le 3 - x$$
$$0 \le z \le 6 - 2x - 2y$$

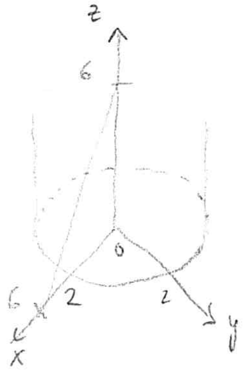
$$\iint_S a \cdot n \, dS = \iiint_G (1 + 1 + 1)\, dx\,dy\,dz = 3\int_0^3\int_0^{3-x}\int_0^{6-2x-2y} dz\,dx\,dy = 3\int_0^3\int_0^{3-x} [z]_0^{6-2x-2y} dy\,dx$$

$$= 3\int_0^3\int_0^{3-x} (6-2x-2y)\,dy\,dx = 3\int_0^3 [6y - 2xy - y^2]_0^{3-x} dx = 3\int_0^3 [6(3-x) - 2x \cdot$$

$$\cdot (3-x) - (3-x)^2]\,dx = 3\int_0^3 (18 - 6x - 6x + 2x^2 - 9 + 6x - x^2)\,dx =$$

$$= 3\int_0^3 (x^2 - 6x + 9)\,dx = 3\left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x\right]_0^3 = 3(9 - 27 + 27) = 27$$

d) $a(x,y,z) = (x^2 + \sin z)\cdot i + (xy + \cos z)\cdot j + e^y \cdot k$, S je uzavřená plocha ohraničená válcovou plochou $x^2 + y^2 = 4$ a rovinami $x + z = 6$, $z = 0$ orientovaná vnější normálou



$$z = 6 - x$$

$$G: \; x^2 + y^2 \le 4 \quad 0 \le z \le 6 - x$$

$\Rightarrow$ válc. souřadnice:
$$0 \le \rho \le 2$$
$$0 \le \varphi \le 2\pi$$
$$0 \le z \le 6 - \rho\cos\varphi$$

$$\iint_S a \cdot n \, dS = \iiint_G (2x + x + 0)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{6-\rho\cos\varphi} 3\rho\cos\varphi \cdot \rho \; dz\,d\rho\,d\varphi =$$

$$\cancel{= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (2\rho^2\cos\varphi + \rho^2\sin\varphi)\cdot[z]_0^{6-\rho\cos\varphi} d\rho\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (2\rho^2\cos\varphi + \rho^2\sin\varphi)\cdot}$$

$$\cancel{\cdot(6 - \rho\cos\varphi)\,d\rho\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (12\rho^2\cos\varphi + 6\rho^2\sin\varphi - 2\rho^3\cos^2\varphi - \rho^3\sin\varphi\cos\varphi)}$$

$$\cancel{d\rho\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\Big(12\cos\varphi\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^2 + 6\sin\varphi\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^2 - 2\cos^2\varphi\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^2 - \sin\varphi\cos\varphi\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^2\Big)\,d\varphi}$$

$$\cancel{= \int_0^{2\pi} (32 \cos\varphi + 16 \sin\varphi - 8 \cos^2\varphi - 4 \sin\varphi \cdot \cos\varphi)\, d\varphi} =$$

$$\cancel{= 32 [\sin\varphi]_0^{2\pi} - 16 [\cos\varphi]_0^{2\pi} - 8 \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \, d\varphi - 4 \cdot \left[\frac{\sin^2\varphi}{2}\right]_0^{2\pi}} =$$

$$= \cancel{-8 \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \, d\varphi = -8 \left[\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\varphi\right]_0^{2\pi} = -8\pi}$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_0^{6-\rho\cos\varphi} 3\rho^2 \cos\varphi \, dz\, d\rho\, d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{2} 3\rho^2 \cos\varphi \cdot (6 - \rho\cos\varphi)\, d\rho\, d\varphi =$$

$$= 3 \int_0^{2\pi}\int_0^{2} (6\rho^2 \cos\varphi - \rho^3 \cos^2\varphi)\, d\rho\, d\varphi = 3 \int_0^{2\pi} \left(\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^2 \cdot 6\cos\varphi - \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^2 \cos^2\varphi\right) d\varphi =$$

$$= 3 \int_0^{2\pi} \left(\frac{48}{3} \cos\varphi - 4 \cos^2\varphi\right) d\varphi = \int_0^{2\pi} (48 \cos\varphi - 12 \cos^2\varphi)\, d\varphi = [48 \sin\varphi]_0^{2\pi} -$$

$$- 12 \left[\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\varphi\right]_0^{2\pi} = -12 \cdot \pi$$