<u>Vektorové pole</u> na M je funkce, která každému bodu z M přiřazuje vektor $\vec{a}$:

$$\vec{a} = u(x,y)\,\vec{i} + v(x,y)\,\vec{j} = \big(u(x,y),\, v(x,y)\big) \qquad \vec{i}=(1,0),\ \vec{j}=(0,1)$$

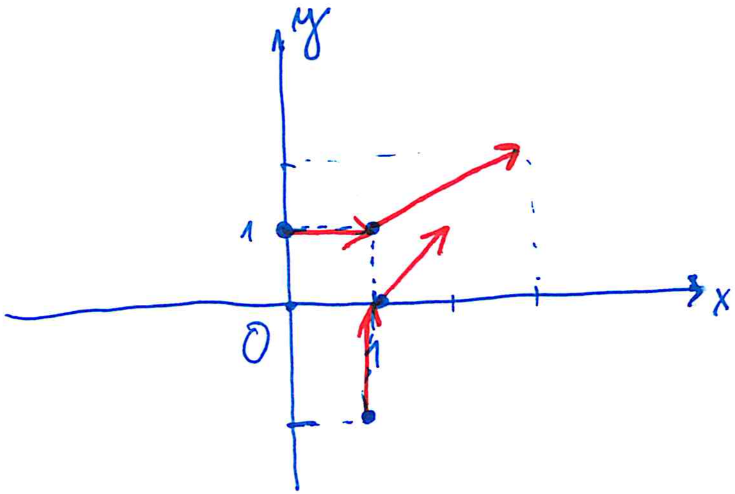
v rovině

$$\vec{b} = u(x,y,z)\,\vec{i} + v(x,y,z)\,\vec{j} + w(x,y,z)\cdot\vec{k} = \big(u(x,y,z),\, v(x,y,z),\, w(x,y,z)\big)$$

$$\vec{i}=(1,0,0),\ \vec{j}=(0,1,0),\ \vec{k}=(0,0,1)$$

v prostoru

Příklad: $\vec{a} = (x+y)\vec{i} + x^2\vec{j} = (x+y, x^2)$



$\vec{a}: [1,1] \mapsto (2,1)$

$[1,0] \mapsto (1,1)$

$[1,-1] \mapsto (0,1)$

$[0,1] \mapsto (1,0)$

Potenciálové pole: Vektorové pole $\vec{a} = u(x,y)\vec{i} + v(x,y)\vec{j}$ se nazývá potenciálové na M, existuje-li funkce f mající na M spojité parciální derivace takové, že $\frac{\partial f}{\partial x} = u(x,y)$ a $\frac{\partial f}{\partial y} = v(x,y)$ neboli $\vec{a} = \operatorname{grad} f$. V prostoru pro $\vec{b} = u(x,y,z)\vec{i} + v(x,y,z)\cdot\vec{j} + w(x,y,z)\cdot\vec{k}$ analogicky: $\frac{\partial f}{\partial x} = u(x,y,z)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = v(x,y,z)$ a $\frac{\partial f}{\partial z} = w(x,y,z)$ tj. $\vec{b} = \operatorname{grad} f$.

V rovině: Předpokládejme, že $u(x,y)$ a $v(x,y)$ mají spojité parciální derivace na M. Pak $\vec{a} = u(x,y)\vec{i} + v(x,y)\vec{j}$ je potenciální na M, právě když

$$\boxed{\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}}$$

Příklady: $\vec{a} = \underbrace{(x+y)}_{u}\vec{i} + \underbrace{x^2}_{v}\vec{j} = (\underbrace{x+y}_{u}, \underbrace{x^2}_{v})$

Je $\vec{a}$ potenciální? $\quad \dfrac{\partial u}{\partial y} \overset{?}{=} \dfrac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \vec{a}$ není potenciální

$$1 \neq 2x$$

2) $\vec{a} = \underbrace{y}_{u}\vec{i} + \underbrace{x}_{v}\vec{j} = (\underbrace{y}_{u}, \underbrace{x}_{v})$

Je $\vec{a}$ potenciálové? $\quad \dfrac{\partial u}{\partial y} \overset{?\checkmark}{=} \dfrac{\partial v}{\partial x} \rightarrow$ Pole $\vec{a}$ je potenciálové

$$1 = 1 \checkmark$$

Hledáme potenciál pole $\vec{a}$ tj. fci $z = f(x,y)$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= u(x,y) = y \quad \rightarrow \quad f = xy + g(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= v(x,y) = x \quad \rightarrow \quad f = xy + h(x) \end{aligned}\right\} f = xy + c$$

$$c \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\vec{a} = \operatorname{grad} f}$$

V prostoru: Rotací pole $\vec{a} = u\vec{\imath} + v\vec{\jmath} + w\vec{k}$ rozumíme

pole $$\operatorname{rot}\vec{a} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

operátor nabla $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$: $\operatorname{rot}\vec{a} = \nabla \times \vec{a}$

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{array}{|ccc|} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{array} = \vec{\imath}\cdot\frac{\partial w}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial v}{\partial x} + \vec{\jmath}\cdot\frac{\partial u}{\partial z} -$$

$$\begin{array}{ccc} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{array}$$

$$- \vec{k}\,\frac{\partial u}{\partial y} - \vec{\imath}\,\frac{\partial v}{\partial z} - \vec{\jmath}\,\frac{\partial w}{\partial x}$$

Předpokládejme, že u, v, w mají na M spojité parciální derivace.

Pak vektorové pole $\vec{b} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\cdot\vec{k}$ je potenciálové na M, právě když $\boxed{\operatorname{rot}\vec{b} = \vec{o}}$ (ve všech bodech M).

Příklad: Rozhodněte, zda je pole $\vec{b} = x\vec{i} + xz\vec{j} + y^2\vec{k}$ potenciálové? na kvádru $\langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$

$$\operatorname{rot}\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & xz & y^2 \end{vmatrix} = \vec{i}\,2y + \vec{k}\,z + \cancel{\vec{j}\cdot 0} - \cancel{\vec{k}\cdot 0} - \vec{i}\,x - \cancel{\vec{j}\,0} =$$

$$\begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{array}$$

$$= \vec{i}(2y - x) + \vec{k}\,z \neq \vec{o}$$

pole $\vec{b}$ není potenciálové