KŘIVKOVÝ INTEGRÁL 2. DRUHU

Nechť je dána po částech hladká křivka c orientovaná v souladu se svým parametrickým vyjádřením $x = x(t)$, $y = y(t)$ (a příp. $z = z(t)$) pro $t \in \langle a, b\rangle$ a vektorové pole $\vec{a} = u(x,y)\cdot\vec{i} + v(x,y)\vec{j}$ (příp. $\vec{b} = u(x,y,z)\,\vec{i} + v(x,y,z)\,\vec{j} + w(x,y,z)\cdot\vec{k}$).

Potom křivkový integrál 2. druhu pole $\vec{a}$ (resp. $\vec{b}$) podél křivky c značíme:

$$\int_c \vec{a}\cdot d\vec{r} = \int_c u(x,y)\,dx + v(x,y)\,dy$$

a definujeme

$$\int_C \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \left[u\,(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + v\,(x(t), y(t)) \cdot y'(t) \right] dt$$

V prostoru:

$$\int_C \vec{b} \cdot d\vec{r} = \int_C u(x,y,z)\,dx + v(x,y,z)\,dy + w(x,y,z)\,dz =$$

$$= \int_a^b \left[u\,(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t) + v\,(x(t), y(t), z(t)) \cdot y'(t) + w\,(x(t), y(t), z(t)) \cdot z'(t) \right] dt$$

Vlastnosti:
$$\int_C (\vec{a} + \vec{b}) \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{a} \cdot d\vec{r} + \int_C \vec{b} \cdot d\vec{r}$$

$$\int_C \alpha \vec{a} \cdot d\vec{r} = \alpha \int_C \vec{a} \cdot d\vec{r}$$

$$\int_{C_1 + C_2} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{a} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{a} \cdot d\vec{r}$$

$$\int_C \vec{a} \cdot d\vec{r} = -\int_{-C} \vec{a} \cdot d\vec{r}$$, kde $-C$ značí opačně orientovanou křivku k C.

Příklady: 1) $\int_C y\,dx + x\,dy$, kde c je úsečka z $[1,1]$ do $[2,4]$

$x = 1 + t$ $\qquad dx = x'\,dt = dt$

$y = 1 + 3t$ $\qquad dy = y'\,dt = 3\,dt$

$t \in \langle 0, 1 \rangle$

$$\int_C y\,dx + x\,dy = \int_0^1 (1+3t)\,dt + (1+t)\,3\,dt = \int_0^1 (4 + 6t)\,dt =$$

$$= \left[4t + 3t^2\right]_0^1 = 4 + 3 = \underline{\underline{7}}$$

2) $\int_d y\,dx + x\,dy$, kde d je parabola $y=x^2$ z $[1,1]$ do $[2,4]$

$x = t \qquad dx = dt$

$y = t^2 \qquad dy = 2t\,dt$

$t \in \langle 1,2 \rangle$

$$\int_d y\,dx + x\,dy = \int_1^2 t^2\,dt + t\,2t\,dt = \int_1^2 (\ 3t^2\ )\,dt =$$

$$= \left[t^3\right]_1^2 = 8 - 1 = \underline{\underline{7}}$$

3) $\int_{e} y\,dx + x\,dy$, e je kružnice $S = [0,0]$, $R = 2$

$x = 2\cos t \qquad dx = -2\sin t\,dt \qquad \vec{a} = (y, x)$ je potenciálové

$y = 2\sin t \qquad dy = 2\cos t\,dt$

$t \in \langle 0, 2\pi \rangle$

$$\int_{e} y\,dx + x\,dy = \int_0^{2\pi} 2\sin t(-2\sin t)\,dt + 2\cos t \cdot 2\cos t\,dt =$$

$$= 4\int_0^{2\pi} (\cos^2 t - \sin^2 t)\,dt = 4\int_0^{2\pi} \cos 2t\,dt = 4 \cdot \frac{1}{2}\left[\sin 2t\right]_0^{2\pi} = \underline{\underline{0}}$$

Je-li $\vec{a}$ potenciální pole na M s potenciální funkcí f a c je hladká křivka v M je

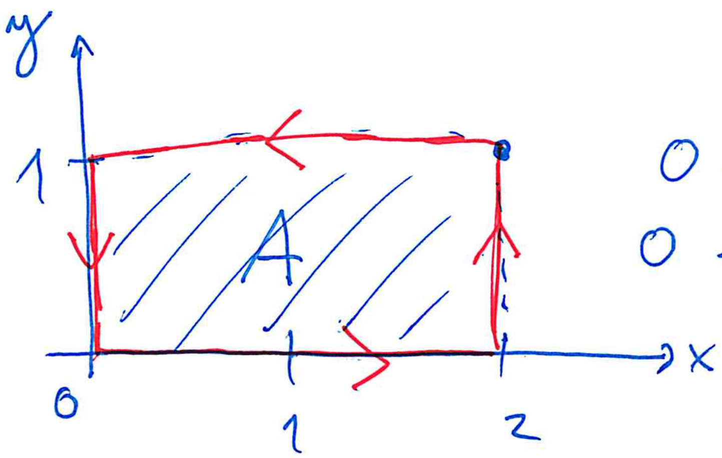
$$\int_c \vec{a}\cdot d\vec{r} = f(B) - f(A),$$ kde A je počáteční a B je koncový bod křivky c.

(nezávislost integrálu na integrační cestě)

Speciálně $\oint_c \vec{a}\cdot d\vec{r} = 0$ pro uzavřenou křivku c.

$$\int_c \vec{F}\cdot d\vec{r} = W \qquad \int_c \vec{E}\cdot d\vec{r} = U$$

$$\int_a xy\,dx + x^2 dy$$, kde a je kladně orientovaný obvod obdélníku s vrcholy $[0,0]$, $[2,0]$, $[2,1]$, $[0,1]$



$0 \le x \le 2$

$0 \le y \le 1$

Gr. věta: $$\int_a xy\,dx + x^2 dy = \iint_A (2x - x)\,dx\,dy = \iint_A x\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^2 x\,dx \right) dy = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 dy = \int_0^1 2\,dy = \left[2y \right]_0^1 = 2$$

Greenova věta: Buď M množina v E_2 jejíž hranici tvoří jednoduchá, uzavřená, po částech hladká kladně orientovaná křivka c. Předpokládejme, že $u(x,y)$, $v(x,y)$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ jsou spojité na M. Potom platí

$$\int_c u\,dx + v\,dy = \iint_M \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx\,dy$$