Gaussova věta

Pro pole $\vec{a} = (u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z))$, kde u, v, w mají spojité parciální derivace na otevřené množině M, definujeme divergenci pole $\vec{a}$ (na M) jako funkci tří proměnných:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \vec{a} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (u, v, w) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{a}$$

Uzavřená plocha je hranice množiny, přes kterou lze počítat trojný integrál – povrch tělesa

<u>Gaussova věta</u>: Buď G těleso, jehož hranici tvoří uzavřená plocha S orientovaná jednotkovým vektorem vnější normály $\vec{n}$.

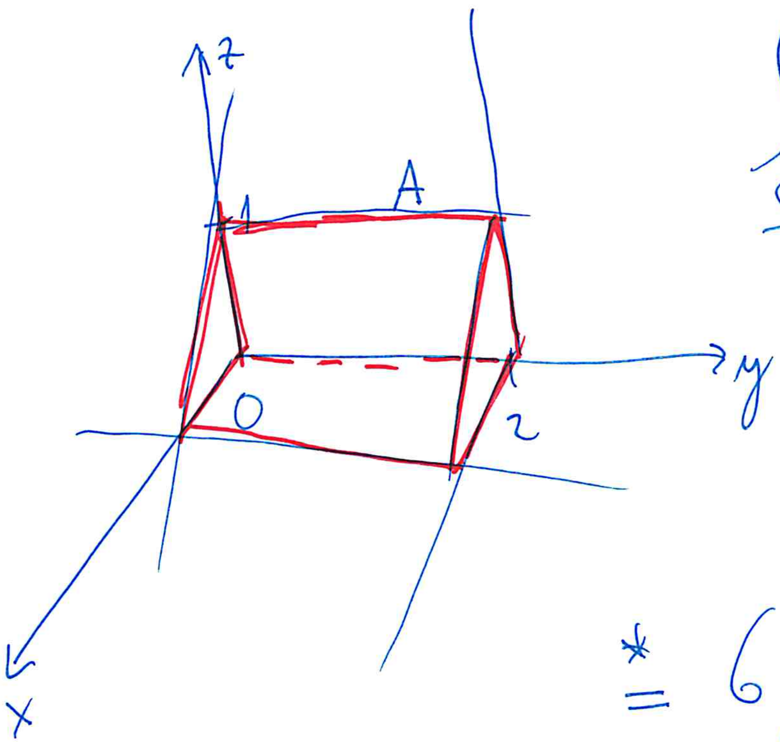
Buď dále $\vec{a} = (u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z))$ vektorové pole takové, že $\operatorname{div} \vec{a}$ je spojitá funkce na G i na S. Potom

$$\boxed{\iint_S \vec{a} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_G \operatorname{div} \vec{a} \, dx\,dy\,dz}$$

Příklad: Vypočtěte tok pole $\vec{a}$ vnější stranou uzavřené plochy S:

1) $\vec{a} = (3x + y,\ 2y - z + 5,\ x + 2y + z)$, S je povrch tělesa A

omezeného $x=0,\ y=0,\ z=0,\ y=2,\ z=1-x$



$$\iint_S \vec{a}\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_A \operatorname{div}\vec{a}\,dx\,dy\,dz = \iiint_A 6\,dx\,dy\,dz \overset{*}{=}$$

$$\operatorname{div}\vec{a} = 3 + 2 + 1 = 6$$

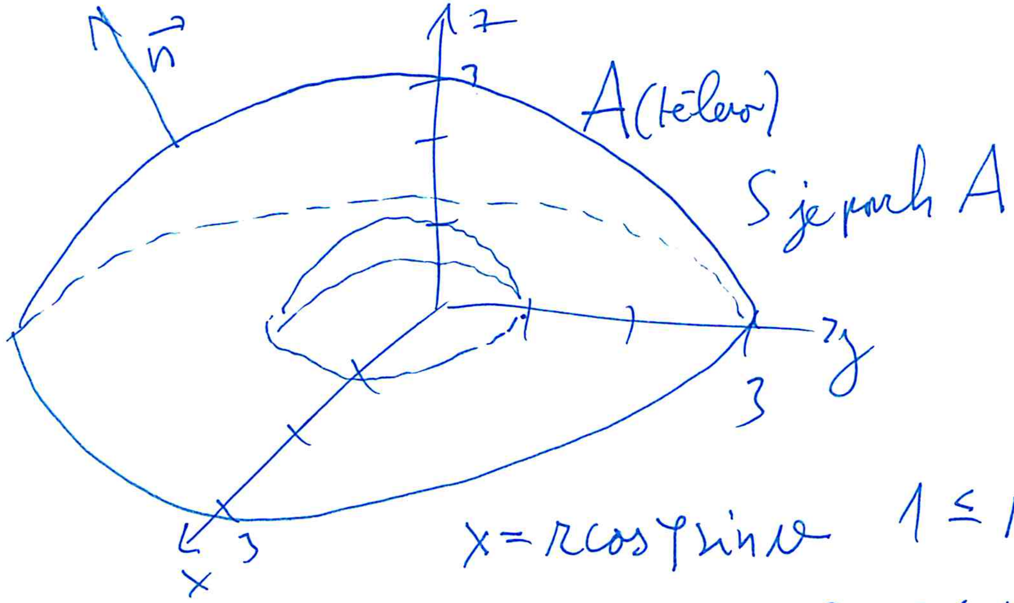
$$\overset{*}{=} 6\iiint_A 1\,dx\,dy\,dz = 6\cdot V_A = 6\,S_{pod}\cdot v = 6\cdot\frac{1}{2}2 = \underline{\underline{6}}$$

2) $\vec{a} = (xy^2, yz^2, zx^2)$ a plocha $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$

$S_1: x^2+y^2+z^2=1, \ z \geq 0$

$S_2: x^2+y^2+z^2=9, \ z \geq 0$

$S_3: 1 \leq x^2+y^2 \leq 9, \ z=0$



$x = r\cos\varphi\sin\vartheta \quad 1 \leq r \leq 3$

$y = r\sin\varphi\sin\vartheta \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$z = r\cos\vartheta \quad 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$

$\operatorname{div}\vec{a} = y^2 + z^2 + x^2 = r^2$

$$\iint_S \vec{a}\cdot\vec{n}\, dS = \iiint_A \operatorname{div}\vec{a}\, dx\,dy\,dz = *$$

$$\int_1^3 r^4 dr = \left[\frac{r^5}{5}\right]_1^3 = \frac{3^5-1}{5} = \frac{242}{5}$$

$$= \iiint_A r^2 r^2 \sin\vartheta\, dr\,d\varphi\,d\vartheta = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_1^3 r^4\sin\vartheta\, dr\right)d\vartheta\right]d\varphi = \int_0^{2\pi}\frac{242}{5}d\varphi = \boxed{\frac{484}{5}\pi}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta\, d\vartheta = [-\cos\vartheta]_0^{\frac{\pi}{2}} = (0-(-1)) = 1$$