Príklad: $y'' - 4y = 4x^2$

1) $y'' - 4y = 0$ predpokladáme riešení $y = e^{\lambda x}$, $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$

$\lambda^2 e^{\lambda x} - 4e^{\lambda x} = 0 \quad / : e^{\lambda x}$

$\lambda^2 - 4 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -2$

$y_H = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$

$$\boxed{y = y_H + y_p = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - x^2 - \frac{1}{2}}$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

2) $y'' - 4y = 4x^2 \rightarrow y_p = Ax^2 + Bx + C = -x^2 - \frac{1}{2}$

$y_p' = 2Ax + B$, $y_p'' = 2A$

dosazení: $2A - 4Ax^2 - 4Bx - 4C = 4x^2 + 0x + 0$

u x^2: $-4A = 4 \rightarrow A = -1$

u x: $-4B = 0 \rightarrow B = 0$

u x^0: $2A - 4C = 0 \rightarrow -2 - 4C = 0 \rightarrow C = -\frac{1}{2}$

Systémy obyčejných lineárních diferenciálních rovnic (SOLDR) 1. řádu

$$\boxed{\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n + b_1 \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n + b_2 \\ &\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n + b_n \end{aligned}}$$

, kde $y_1, y_2, \dots, y_n$ jsou neznámé funkce $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$. $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn}$ jsou zadané funkce

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

a $b_1, \dots, b_n$ jsou zadané funkce $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

maticový zápis: $\boxed{\vec{y}\,' = A \cdot \vec{y} + \vec{b}}$

Nechť maticová funkce A a sloupec $\vec{b}$ jsou spojité na otevřeném intervalu I. Potom pro každý bod $[x_0, \vec{y_0}] \in I \times R^n$ má Cauchyova úloha

$$\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b} \quad \text{s podmínkou} \quad \vec{y}(x_0) = \vec{y_0}$$

právě jedno řešení na I.

Pro $\vec{b} = \vec{o}$ je soustava $\vec{y}' = A \cdot \vec{y}$ nazývá homogenní.

Všechna řešení $\vec{y}' = A \cdot \vec{y}$ tvoří pro matice A typu $n \times n$ prostor dimenze n. Potřebujeme najít n lineárně nezávislých řešení (tzv. fundamentální systém)

Řešení homogenních SOLDR 1. ř. s konst. koeficienty

$\downarrow$

matice A je číselná matice

$$\boxed{\vec{y}\,' = A \cdot y} \quad (*)$$

předpokládáme řešení ve tvaru $\boxed{\vec{y} = e^{\lambda x} \cdot \vec{v}}$, kde λ je nějaké číslo a $\vec{v}$ je číselný vektor.

$\vec{y}\,' = \lambda e^{\lambda x} \cdot \vec{v}$ dosadíme do $(*)$

$$\lambda e^{\lambda x} \cdot \vec{v} = A e^{\lambda x} \cdot \vec{v} \qquad / : e^{\lambda x}$$

$$\boxed{\lambda \cdot \vec{v} = A \cdot \vec{v}}$$

tj. λ je vlastní číslo matice A a $\vec{v}$ je příslušný vlastní vektor.

$$y_1' = 3y_1 + 2y_2 \qquad \vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \rightarrow \vec{y}' = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \vec{y}$$
$$y_2' = y_1 + 4y_2$$

Hledáme vl. čísla a vl. vektory matice $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

$$0 = \det(A - \lambda E) = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 4-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)(4-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$
$$(\lambda-2)(\lambda-5) = 0$$

vl. čísla $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 5$

a) pro $\lambda_1 = 2$: $(A - \lambda E)\cdot\vec{u}_1 = \vec{o}$

$(A - 2E)\cdot\vec{u}_1 = \vec{o}$

$x + 2y = 0 \Leftarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$y = t\ (t \in \mathbb{R})$

$x = -2t$

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} -2t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \vec{u}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b) $(A - 5E)\cdot\vec{u}_2 = \vec{o}$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x - y = 0$

$x = y = s\ (s \in \mathbb{R})$

$$\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} s \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{y}_1 = e^{2x} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2e^{2x} \\ e^{2x} \end{bmatrix}$$
$$\vec{y}_2 = e^{5x} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{5x} \\ e^{5x} \end{bmatrix}$$

OBECNÉ ŘEŠENÍ

$$\vec{y} = c_1 \vec{y}_1 + c_2 \vec{y}_2$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$\vec{y}' = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}}_{B} \cdot \vec{y} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow y_1' = y_1 + 2y_2 \\ \rightarrow y_2' = -y_1 - y_2 \end{array}$$

vl. čísla a vl. vektory B:

$$0 = \det(B - \lambda E) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & -1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) + 2 = 0$$

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda_1 = i, \; \lambda_2 = -i$$

a) pro $\lambda_1 = i$: $(B - iE)\vec{u}_1 = \vec{o}$

$$\begin{bmatrix} 1-i & 2 \\ -1 & -1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

eliminace: $\begin{bmatrix} 1-i & 2 \\ -1 & -1-i \end{bmatrix} (1-i) \sim \begin{bmatrix} 1-i & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$2 + (1-i)(-1-i) = 2 - 1 + i - i - 1 = 0$$

$(1-i)x + 2y = 0 \qquad y = -\frac{1-i}{2} \cdot x$

$x = 2t \quad (t \in \mathbb{R})$

$y = (i-1)t$

$$\vec{u}_1 = t \begin{bmatrix} 2 \\ i-1 \end{bmatrix} \xrightarrow[t=1]{} \vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ i-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix}$$

pro $\lambda_2 = -i$

$$\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = i \quad \vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix}$$

$$\vec{y} = e^{\lambda x} \cdot \vec{v}\,, \quad e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

$$\lambda_2 = -i \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix}$$

$$\vec{y}_1 = e^{ix}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix}\right) = (\cos x + i\sin x)\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix}\right)$$

$$\vec{y}_2 = e^{-xi}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix}\right) = (\cos x - i\sin x)\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix}\right)$$

$$\frac{\vec{y}_1 + \vec{y}_2}{2} = \cos x \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + i\sin x \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix} = \underbrace{\cos x \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \sin x \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}} = \vec{y}_I = \begin{bmatrix} 2\cos x \\ -\cos x - \sin x \end{bmatrix}$$

$$\frac{\vec{y}_2 - \vec{y}_1}{2} \cdot i = \left(-\cos x \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix} - i\sin x \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right) i = \underbrace{\cos x \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \sin x \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}} = \vec{y}_{II}$$

$$\vec{y}\,' = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{C} \cdot \vec{y}$$

hledáme vlastní čísla matice C :

$$) = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda)+1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

$$(\lambda-2)^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 2$$

pro $\lambda_{1,2} = 2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x + y = 0$

$y = t \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \vec{u}_1 = \begin{bmatrix} -t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$x = -t$

$t = 1 : \vec{u}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\vec{y}_1 = e^{2x} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{2x} \\ e^{2x} \end{bmatrix}$$

$\vec{y}_2 = ?$

Shrnutí: Pro $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$, $1 \leq k \leq n$ lineárně nezávislé vl. vektory matice A $(n \times n)$ příslušné ne nutně různým vlastním číslům $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ jsou

$$\vec{y}_1 = e^{\lambda_1 x}\vec{v}_1, \ \vec{y}_2 = e^{\lambda_2 x}\vec{v}_2, \ \dots, \ \vec{y}_k = e^{\lambda_k x}\vec{v}_k$$

lin. nezávislá řešení soustavy $A \cdot \vec{y} = \vec{y}\,'$.

Problém: potřebujeme najít vždy $\underline{n}$ lin. nezávislých řešení. Vlastních vektorů může být ale méně ($\underline{k}$)