# NEHOMOGENNÍ SOLDR (SKK)

Soustava $\vec{y}\,' = A \cdot \vec{y} + \vec{b}$

$$\vec{y}\,' - A \cdot \vec{y} = \vec{b}$$

všechna řešení hledáme ve tvaru $\boxed{\vec{y} = \vec{y}_H + \vec{y}_P}$, kde

$\vec{y}_H$ je řešení přidružené homogenní soustavy $\vec{y}\,' = A \cdot \vec{y}$

a $\vec{y}_P$ je partikulární řešení soustavy $\vec{y}\,' - A\vec{y} = \vec{b}$.

Jsou-li složky $\vec{b}$ funkce ve speciálním tvaru, hledáme $\vec{y}_P$ metodou neurčitých koeficientů.

Je-li pravá strana ve tvaru

$\boxed{\vec{b} = e^{\alpha x} \cdot \vec{Q}_r(x)}$, kde $\vec{Q}_r$ je vektor, jehož složky jsou polynomy stupně nejvýše $r$, hledáme

$\boxed{\vec{y}_p = e^{\alpha x} \cdot \vec{R}_{r+k}(x)}$, kde $\vec{R}_{r+k}$ je vektor, jehož složky jsou polynomy stupně $r+k$, kde $k$ je násobnost čísla $\alpha$ jako kořene charakteristické rovnice.

1) $\vec{y}\,' = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \vec{y} + \begin{bmatrix} x \\ 3 \end{bmatrix}$ , $\vec{y}(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$

a) přidružená homogenní soustava $\vec{y}\,' = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \vec{y}$

$$0 = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 2 & -2-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)(-2-\lambda) + 4 = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

$$(\lambda+1)(\lambda-2) = 0$$

$$\lambda_1 = -1 , \lambda_2 = 2$$

vl. číslo $\lambda_1 = -1$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$2x - y = 0$ $\quad \vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$2x = y$

vl. číslo $\lambda_2 = 2$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x - 2y = 0$ $\quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$x = 2y$

$$\boxed{\vec{y}_H = c_1 e^{-x} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 e^{2x} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

b) $\vec{y}\,' = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \vec{y} + \begin{bmatrix} x \\ 3 \end{bmatrix} e^{0x}$ ($\alpha = 0$ není kořenem ch.r. $\to k = 0$)

hledáme $\vec{y}_p = \begin{bmatrix} Ax + B \\ Cx + D \end{bmatrix}$ $\vec{y}_p\,' = \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix}$ a dosadíme $\vec{y}_p$ a $\vec{y}_p\,'$ do soustavy

$$\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ax+B \\ Cx+D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ 3 \end{bmatrix}$$

1\. složka: $A = 3(Ax+B) - 2(Cx+D) + x$

2\. složka: $C = 2(Ax+B) - 2(Cx+D) + 3$

1\. složka: u $x$: $0 = 3A - 2C + 1$

u $x^0$: $A = 3B - 2D$

2\. složka: u $x$: $0 = 2A - 2C$ $(-1)$

u $x^0$: $C = 2B - 2D + 3$

$+ \; 0 = A + 1 \to$ $\boxed{A = -1 \quad B = 3 \quad C = -1 \quad D = 5}$

$-1 = 3B - 2D$

$-1 = 2B - 2D + 3$ $/(-1)$

$0 = B - 3$

$$\vec{y}_p = \begin{bmatrix} 3 - x \\ 5 - x \end{bmatrix}$$

obecné řešení: $\vec{y} = \vec{y}_H + \vec{y}_p = c_1 e^{-x}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + c_2 e^{2x}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3-x\\5-x\end{bmatrix}$

c) poč. podmínka: $\vec{y}(0) = \begin{bmatrix}4\\7\end{bmatrix}$

$$c_1\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\7\end{bmatrix}$$

$$c_1 + 2c_2 = 1 \quad /\cdot(-2)$$
$$2c_1 + c_2 = 2$$
$$-3c_2 = 0 \rightarrow \boxed{\begin{matrix}c_2 = 0\\ c_1 = 1\end{matrix}}$$

$$\boxed{\begin{matrix}\vec{y} = e^{-x}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3-x\\5-x\end{bmatrix} \\[2em] \vec{y} = \begin{array}{c}\begin{bmatrix}e^{-x}+3-x\\2e^{-x}+5-x\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l}y_1(x)\\y_2(x)\end{array}\end{matrix}}$$

2) $\vec{y}' = \overset{A}{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}} \vec{y} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2x}$

a) $\vec{y}' = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \vec{y}$ $\quad 0 = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)^2$

$\lambda_{1,2} = 2$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad x = 0$ např. $y = 1$ $\quad \vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad \vec{y}_1 = e^{2x} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

zobecněný vlastní vektor

$(A-2E)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ zobecněný vl. vektor může cokoliv kromě $\vec{u}_1$

zvolíme např. $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\vec{y}_2 = e^{2x} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{2x} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = e^{2x} \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}$

$$\vec{y}_H = C_1 e^{2x}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} + C_2 e^{2x}\begin{bmatrix}1\\ \cancel{x}\end{bmatrix}$$

b) $\vec{y}\,' = \begin{bmatrix}2 & 0\\1 & 2\end{bmatrix}\vec{y} + \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}e^{2x}$ $\quad \alpha = 2 \rightarrow$ druhá je dvojnásobný kořen ch.r. $k=2$

$$\vec{y}_p = \begin{bmatrix}Ax^2+Bx+C\\Dx^2+Ex+F\end{bmatrix}e^{2x} \qquad \vec{y}_p\,' = \begin{bmatrix}2Ax+B\\2Dx+E\end{bmatrix}e^{2x} + 2\begin{bmatrix}Ax^2+Bx+C\\Dx^2+Ex+F\end{bmatrix}e^{2x}$$

dosadíme do soustavy:

$$\cancel{e^{2x}}\begin{bmatrix}2Ax^2+2Bx+2Ax+B+2C\\2Dx^2+2Dx+2Ex+E+2F\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 0\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Ax^2+Bx+C\\Dx^2+Ex+F\end{bmatrix}\cancel{e^{2x}} + \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\cancel{e^{2x}}$$

1. složka: $2Ax^2+2Bx+2Ax+B+2C = 2Ax^2+2Bx+2C+1$

2. složka: $2Dx^2+2Dx+2Ex+E+2F = Ax^2+Bx+C+2Dx^2+2Ex+2F+1$

1. sloupec

$u\, x^2: \quad 2A = 2A$

$u\, x: \quad 2A + \cancel{2B} = \cancel{2B} \rightarrow A = 0$

$u\, x^0: \quad B + \cancel{2C} = \cancel{2C} + 1 \rightarrow B = 1$

2. sloupec

$u\, x^2: \quad 2D = A + 2D \rightarrow A = 0$

$u\, x: \quad 2D + \cancel{2E} = B + \cancel{2E} \rightarrow D = \frac{1}{2}$

$u\, x^0: \quad E + \cancel{2F} = \cancel{2F} + 1 + C$

$C = t \ (t \in \mathbb{R}) \quad E = 1 + t \quad F = s \ (s \in \mathbb{R})$

$$\vec{y}_p = \begin{bmatrix} x + t \\ \frac{1}{2}x^2 + (1+t)x + s \end{bmatrix} e^{2x}$$

zvolíme např. $t = 0$, $s = 0$

$$\boxed{\vec{y}_p = \begin{bmatrix} x \\ \frac{1}{2}x^2 + x \end{bmatrix} e^{2x}}$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$\rightarrow \boxed{\vec{y} = \vec{y}_H + \vec{y}_p = c_1 e^{2x} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{2x} \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ \frac{1}{2}x^2 + x \end{bmatrix} e^{2x}}$$

3) $\vec{y}' = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \vec{y} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{x}$

a) $\vec{y}' = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \vec{y} \rightarrow 0 = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 & -1 \\ -2 & -\lambda & -2 \\ 3 & 4 & 5-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda)(5-\lambda) + 12 + 8 - (3\lambda - 8(1-\lambda) + 4(5-\lambda)) =$

$= -5\lambda + \lambda^2 + 5\lambda^2 - \lambda^3 + 20 - 3\lambda + 8 - 8\lambda - 20 + 4\lambda = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 =$

$= (2-\lambda)^3 = 0 \qquad \lambda_{1,2,3} = 2$

$\vec{y}_1 = e^{2x} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \leftarrow \vec{u}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

hledáme vl. vektory pro $\lambda_{1,2,3} = 2$

$\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} (-2)\ 3 \sim \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{-2} & \cancel{0} \end{bmatrix}$

$x + 2y + z = 0$

$2y = 0 \rightarrow y = 0$

$z = 1$ (zvolíme)

$x = -1$

zobecněný vl. vektor:

$$(A-2E)^2 = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow 2x+2y+2z=0$$

$$(A-2E)^2 \cdot \vec{u}_2 = \vec{o}$$

$$x+y+z=0$$

$$z=t \ (t \in \mathbb{R})$$

$$y=s \ (s \in \mathbb{R})$$

$$x=-s-t$$

$$\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} -s-t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \underline{\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

TOTO JE VL. VEKTOR!

$$\vec{y}_2 = e^{2x}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + x\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{2x}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \boxed{e^{2x}\begin{bmatrix} -1-x \\ 1 \\ x \end{bmatrix}}$$

další zobecněný vektor..

$$(A-2E)^3 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

poslední vl. vektor může být

cokoliv, ale $(A-2E)^2 \cdot \vec{u}_3 \neq \vec{o}$

$$\vec{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{y}_3 = e^{2x}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + x\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} + \frac{x^2}{2}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{y}_3 = e^{2x}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{x^2}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}\right) = \boxed{e^{2x}\begin{bmatrix} -x + x^2 \\ -2x \\ 1+3x-x^2 \end{bmatrix} = \vec{y}_3}$$

b) $\vec{y}\,' = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \vec{y} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^x$ $\quad (k=0)$

$\vec{y}_p = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} e^x \qquad \vec{y}_p\,' = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} e^x$ a dosadíme:

$$\boxed{\vec{y}_p = \begin{bmatrix} -14 \\ -9 \\ 19 \end{bmatrix} e^x}$$

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} \cancel{e^x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} \cancel{e^x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cancel{e^x}$$

1.r: $A = A - 2B - C + 1$

2.r. $B = -2A - 2C + 1$

3.r. $C = 3A + 4B + 5C + 2$

$2B + C = 1$

$2A + B + 2C = 1 \quad /\cdot 3$

$-3A - 4B - 4C = 2 \quad /\cdot 2$

$2B + C = 1 \quad /\cdot 2$

$-5B - 2C = 7$

$-B = 9 \rightarrow \boxed{B = -9}$

$\boxed{A = -14}$ $\quad \boxed{C = 19}$

$$\vec{y} = \vec{y}_H + \vec{y}_p = c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2x} + c_2 \begin{bmatrix} -1-x \\ 1 \\ x \end{bmatrix} e^{2x} + c_3 \begin{bmatrix} x^2 - x \\ -2x \\ 1+3x-x^2 \end{bmatrix} e^{2x} + \begin{bmatrix} -14 \\ -9 \\ 12 \end{bmatrix} e^{x}$$

$$\vec{y}\,' = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 \\ -3 & 3 & -7 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \vec{y} + \begin{bmatrix} x \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1) $\vec{y}\,' = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 \\ -3 & 3 & -7 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \vec{y}$ $\qquad 0 = \det \begin{bmatrix} 5-\lambda & 0 & 4 \\ -3 & 3-\lambda & -7 \\ -2 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} =$

$$= (5-\lambda)\underline{(3-\lambda)}(-1-\lambda) - \left(-8\,\underline{(3-\lambda)}\right) = (3-\lambda)\left[-5-5\lambda+\lambda+\lambda^2+8\right] =$$

$$= (3-\lambda)\left(\lambda^2-4\lambda+3\right) = (3-\lambda)(\lambda-3)(\lambda-1) \qquad \lambda_{1,2} = 3$$

$$\lambda_3 = 1$$

vl. vektor pro $\lambda_{1,2} = 3$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -3 & 0 & -7 \\ \cancel{-2} & \cancel{0} & \cancel{-4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2x + 4z &= 0 \quad /3 \\ -3x - 7z &= 0 \quad /\cdot 2 \end{aligned}$$

$$-2z = 0 \rightarrow z = 0$$

$$x = 0$$

$$y = t \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$\vec{u_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{y_1} = e^{3x} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{u_2} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

zob. vl. vektor pro $\lambda_{1,2} = 3$

$$(A - 3E)^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -3 & 0 & -7 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -3 & 0 & -7 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -8 \\ 8 & 0 & 16 \\ 4 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$4x + 8z = 0$$

$$z = t$$

$$x = -2t$$

$$y = s$$

$$\vec{y_2} = e^{3x} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -3 & 0 & -7 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{3x} \left( \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = e^{3x} \begin{bmatrix} -2 \\ -x \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{y_2}$$

vl. vektor pro $\lambda_3 = 1$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -3 & 2 & -7 \\ \cancel{-2} & \cancel{0} & \cancel{-2} \end{bmatrix} \left(\cdot \frac{1}{4}\right)$$

$$x + z = 0$$
$$-3x + 2y - 7z = 0$$

$z = t \quad (t \in \mathbb{R})$

$x = -t$

$2y = +7t - 3t = +4t$

$y = +2t$

$$\vec{u}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ +2 \\ 1 \end{bmatrix} \to \vec{y}_3 = e^{x} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{y}_H = c_1 e^{3x} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{3x} \begin{bmatrix} -2 \\ -x \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 e^{x} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2) $$\vec{y}\,' = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 \\ -3 & 3 & -7 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \vec{y} + \begin{bmatrix} x \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{0x}$$

$$\vec{y}_p = \begin{bmatrix} Ax+B \\ Cx+D \\ Ex+F \end{bmatrix} \qquad \vec{y}_p\,' = \begin{bmatrix} A \\ C \\ E \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A \\ C \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 \\ -3 & 3 & -7 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ax+B \\ Cx+D \\ Ex+F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1.r: $A = 5Ax + 5B + 4Ex + 4F + x$

2r. $C = -3Ax - 3B + 3Cx + 3D - 7Ex - 7F + 1$

3r. $E = -2Ax - 2B - Ex - F$

1ř. $u\,x: \; 0 = 5A + 4E + 1$

$u\,x^0: \; A = 5B + 4F$

2ř. $u\,x: \; 0 = -3A + 3C - 7E$

$u\,x^0: \; C = -3B + 3D - 7F + 1$

3ř. $u\,x: \; 0 = -2A - E$

$u\,x^0: \; E = -2B - F$ /4.

/.4

$0 = -3A + 1 \to \boxed{A = \frac{1}{3}}$

$\boxed{E = -\frac{2}{3}}$

$3D = C + 3B + 7F - 1$ $\quad \boxed{D = -\frac{55}{27}}$

$-\frac{7}{3} = -3B \to \boxed{B = \frac{7}{9}}$

$F = -2B - E = -\frac{14}{9} + \frac{2}{3}$

$\boxed{F = -\frac{8}{9}}$ $\quad \boxed{C = -\frac{11}{9}}$

$3C = 3A + 7E = 1 - \frac{14}{3}$

obecné: $\vec{y} = \vec{y}_H + \vec{y}_P = C_1 e^{3x} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 e^{3x} \begin{bmatrix} -2 \\ -x \\ 1 \end{bmatrix} + C_3 e^{x} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3}x + \frac{7}{9} \\ -\frac{11}{9}x - \frac{55}{27} \\ -\frac{2}{3}x - \frac{8}{9} \end{bmatrix}$