$$\vec{y}\,' = \overbrace{\begin{bmatrix} -13 & 4 & 8 \\ -24 & 7 & 14 \\ -13 & 4 & 8 \end{bmatrix}}^{A} \vec{y}$$

$$\lambda_1 = 0$$
$$\lambda_{2,3} = 1 \pm 2i$$

$$2\cdot 12 + (3-i)(-7-i) =$$
$$= 24 - 21 + 4i - 1$$

Vl. vektor pro $\lambda_2 = 1 + 2i$: $(A - \lambda_2 \cdot E)\cdot \vec{u} = \vec{o}$

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} -14-2i & 4 & 8 \\ -24 & 6-2i & 14 \\ -13 & 4 & 7-2i \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot\frac{1}{2} \\ \cdot\frac{1}{2} \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} -7-i & 2 & 4 \\ -12 & 3-i & 7 \\ -13 & 4 & 7-2i \end{bmatrix} \sim \begin{matrix} 12 & 13 \\ (-7-i) & \\ & (-7-i) \end{matrix} \sim \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} -7-i & 2 & 4 \\ 0 & 2+4i & -1-7i \\ \cancel{0} & \cancel{-2-4i} & \cancel{1+7i} \end{bmatrix}$$

$$4\cdot 13 + (7-2i)(-7-i) = 52 - 49 - 7i + 14i - 2$$

$$(-7-i)x + 2y + 4z = 0$$
$$(2+4i)y + (-1-7i)z = 0$$

$$z = \underline{\underline{t}}\ (t \in \mathbb{R})$$

$$y = \frac{(1+7i)}{(2+4i)} t \cdot \frac{(2-4i)}{(2-4i)} = \frac{30+10i}{20} t = \underline{\underline{\frac{3+i}{2} t}}$$

$$x = \frac{(-3-i)t - 4t}{-7-i} = \underline{\underline{t}}$$

$\lambda = 2$: $x = 2$

$y = 3 + i \rightarrow \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3+i \\ 2 \end{bmatrix}$ $\lambda_2 = 1+2i$ | $\lambda_3 = 1-2i$ $\vec{u}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3-i \\ 2 \end{bmatrix}$

$z = 2$

$$\vec{y}_{II} = e^{(1+2i)x}\begin{bmatrix} 2 \\ 3+i \\ 2 \end{bmatrix} = e^x \cdot e^{2ix}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}\right) = e^x(\cos 2x + i \sin 2x)\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$\vec{y}_{III} = e^{(1-2i)x}\begin{bmatrix} 2 \\ 3-i \\ 2 \end{bmatrix} = e^x \cdot e^{-2ix}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}\right) = e^x(\cos 2x - i \sin 2x)\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$\vec{y}_1 = \vec{y}_{II} + \vec{y}_{III} = e^x 2\cos 2x \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + e^x 2 \sin 2x \cdot i \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 0 \end{bmatrix} = 2e^x\left(\cos 2x \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \sin 2x \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$\vec{y}_2 = (\vec{y}_{II} - \vec{y}_{III})\, i = \ldots$$

$$\vec{y}\,' = \overbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}}^{B} \vec{y}$$

hledáme vl. čísla a vl. vektory matice B:

ch. r. $\det(B - \lambda E) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 4 \\ -1 & 6-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(6-\lambda) + 4 = 16 - 8\lambda + \lambda^2 =$

$= (4-\lambda)^2 = 0$

$\underline{\underline{\lambda_{1,2} = 4}}$

vl. vektory pro $\lambda_{1,2} = 4$ $\quad \underline{(B - 4E)\,.\,\vec{u} = \vec{o}}$

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\downarrow$

$-x + 2y = 0 \quad x = 2y \quad y = t \quad x = 2t \quad t \in \mathbb{R}$

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 2t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{t=1} \vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \vec{y}_1 = e^{4x} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Zobecněný vl. vektor pro $\lambda = 4$: $(B-4E)^2 \cdot \vec{v} = \vec{o}$ $\left((B-4E) \cdot \vec{v} \neq \vec{o}\right)$

$$(B-4E)^2 = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 0 = 0$$

Může zvolit zcela libovolně

$$\vec{y}_2 = e^{\lambda x}\left(E + \frac{1}{1!} x (B - \lambda E)\right)\vec{v}$$

např. $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\vec{y}_2 = e^{4x}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{4x}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = e^{4x}\begin{bmatrix} 1-2x \\ -x \end{bmatrix}$$

obecné ř.: $\vec{y} = c_1 \vec{y}_1 + c_2 \vec{y}_2 = c_1 e^{4x} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{4x} \begin{bmatrix} 1-2x \\ -x \end{bmatrix}$ $\quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$\vec{y}\,' = \overset{C}{\begin{bmatrix} 1 & 6 & -2 \\ -1 & 6 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}} \vec{y}$$

vl. čísla a vl. vektory matice C: $0 = \det(C - \lambda E) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 6 & -2 \\ -1 & 6-\lambda & -1 \\ -1 & 3 & 2-\lambda \end{bmatrix} =$

$$\overset{*}{=} (3-\lambda)^3 \qquad \lambda_{1,2,3} = 3$$

vl. vektor pro $\lambda_{1,2,3} = 3$: $\underline{(C - 3E)}\,\vec{u} = \vec{o}$

$$\begin{bmatrix} \cancel{-2} & \cancel{6} & \cancel{-2} \\ \cancel{-1} & \cancel{3} & \cancel{-1} \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \qquad -x + 3y - z = 0 \qquad z = t \ (t \in \mathbb{R}),\ y = s \ (s \in \mathbb{R})$$

$$x = 3s - t$$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 3s - t \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3s \\ s \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = s \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=\vec{v}_1} + t \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=\vec{v}_2}$$

$$\vec{y}_1 = e^{3x} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{y}_2 = e^{3x} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

zobecněný vl. vektor: $(C-3E)^2 \cdot \vec{u} = \vec{o} \quad \left((C-3E)\cdot\vec{u} \neq \vec{o} \right)$

$$(C-3E)^2 = \begin{bmatrix} -2 & 6 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 6 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

zobecněný vl. vektor můžeme lib. zvolit $\vec{v_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\vec{y_3} = e^{3x}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{1!}x \begin{bmatrix} -2 & 6 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{3x}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right) = e^{3x} \begin{bmatrix} 1-2x \\ -x \\ -x \end{bmatrix}$$

$$\vec{y} = c_1 \vec{y_1} + c_2 \vec{y_2} + c_3 \vec{y_3} = c_1 e^{3x} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{3x} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 e^{3x} \begin{bmatrix} 1-2x \\ -x \\ -x \end{bmatrix}$$

$$\vec{y}\,' = \begin{array}{c} D \\ \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \end{array} \vec{y}$$

vlastní čísla a vl. vektory D: $0 = \det(D - \lambda E) = \det \begin{bmatrix} -4-\lambda & 1 & 1 \\ -4 & -\lambda & 2 \\ -2 & 1 & -2-\lambda \end{bmatrix} =$

$= -(\lambda+2)^3 = 0 \qquad \underline{\lambda_{1,2,3} = -2}$

vl. vektory pro $\lambda_{1,2,3} = -2$: $(D - \lambda E) \cdot \vec{u} = \vec{o}$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ \cancel{-4} & \cancel{2} & \cancel{2} \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} -2x + y + z = 0 \\ -2x + y = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} x = t \\ y = 2t \\ \underline{z = 0} \end{array} \rightarrow \vec{u} = \begin{bmatrix} t \\ 2t \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\vec{y}_1 = e^{-2x} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

Zobecněné vl. vektory: $(\mathbb{D}+2E)^2 \cdot \vec{u} = \vec{o} \quad \left((\mathbb{D}+2E)\vec{u} \neq \vec{o} \right)$

$$(\mathbb{D}+2E)^2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ \cancel{-4} & \cancel{2} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{bmatrix}$$

$-2x + y = 0$

$z = t \ (t \in \mathbb{R})$

$x = s \ (s \in \mathbb{R})$

$y = 2s$

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} s \\ 2s \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

TOTO JE VL. VEKTOR!

$$\vec{y}_2 = e^{-2x}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{1!}x \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{-2x}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = e^{-2x}\begin{bmatrix} x \\ 2x \\ 1 \end{bmatrix}$$

Další zobecněný vektor: $(D+2E)^3 \cdot \vec{w} = \vec{o}$ $\quad \left((D+2E)^2 \cdot \vec{w} \neq \vec{o} \right)$

$$(D+2E)^3 = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{(D+2E)^2} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{D+2E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Můžeme zvolit libovolné např. $\vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\vec{y} = e^{\lambda x} \left(E + \frac{1}{1!} x (D - \lambda E) + \frac{1}{2!} x^2 (D - \lambda E)^2 \right) \cdot \vec{w}$$

$$\vec{y}_3 = e^{-2x} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} x^2 \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{y}_3 = e^{-2x} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} x^2 \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = e^{-2x} \begin{bmatrix} 1 - 2x - x^2 \\ -4x - 2x^2 \\ -2x \end{bmatrix}$$

obecné řešení!

$$\vec{y} = c_1\vec{y}_1 + c_2\vec{y}_2 + c_3\vec{y}_3 = c_1 e^{-2x}\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} + c_2 e^{-2x}\begin{bmatrix}x\\2x\\1\end{bmatrix} + c_3 e^{-2x}\begin{bmatrix}1-2x-x^2\\-4x-2x^2\\-2x\end{bmatrix}$$

$$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$