1. série úloh z Matematiky IIB

Pokyny k vypracování: Každému studentovi je přidělen kód skládající se ze 4 cifer, např. 0192. To znamená, že odevzdá (0) varianta 1. příkladu, (1) varianta 2. příkladu, (9) varianta 3. příkladu a (2) varianta 4. příkladu. Řešení příkladů pište na list papíru formátu A4, který označte jménem, číslem studijní skupiny a přiděleným kódem.
Hodnocení: za 1. a 3. příklad po 3 bodech, za 2. a 4. příklad po 2 bodech.

1. Vypočítejte hmotnost a určete souřadnice těžiště T rovinné desky Ω s hustotou $h(x,y)$, je-li:

   (0) Ω ohraničená osou x, přímkou $x=1$ a křivkou $y=\sqrt{x}$, $h(x,y)=x+y$;

   (1) Ω ohraničená křivkami $y=\sin x$, $y=0$, $x=0$ a $x=\pi$, $h(x,y)=y$;

   (2) Ω ohraničená kružnicí $x^2+y^2=a^2$, $a>0$, souřadnicovými osami, ležící v I. kvadrantu, $h(x,y)=xy$;

   (3) Ω obdélník o vrcholech $[0,0],[0,2],[3,0],[3,2], h(x,y)=xy^2$;

   (4) Ω ohraničená osou x a horní polovinou kruhu $x^2+y^2=1$, $h(x,y)=x^2+y^2$;

   Nalezněte souřadnice těžiště množiny Ω, je-li:

   (5) Ω ohraničená křivkami $y=x$ a $y=2-x^2$;

   (6) Ω ohraničená parabolami $x=3y^2-6y$, $x=2y-y^2$;

   (7) Ω nad osou x a mezi kružnicemi $x^2+y^2=a^2$, $x^2+y^2=b^2$, $0<a<b$;

   (8) Ω trojúhelník ohraničený přímkami $y=x$, $x=1$ a $y=0$;

   (9) Ω ohraničená osou y a pravou polovinou kruhu $x^2+y^2=a^2$, $a>0$.

2. Určete objem tělesa B, je-li:

   (0) B ohraničeno paraboloidem $z=x^2+y^2$ a rovinou $z=9$;

   (1) B ohraničeno shora a zdola sférou $x^2+y^2+z^2=9$ a po stranách válcem $x^2+y^2=4$;

   (2) B v I. oktantu, pod sférou $x^2+y^2+z^2=16$ a uvnitř válce $x^2+y^2=4x$;

   (3) B mezi kuželem $z=\frac{h}{a}\sqrt{x^2+y^2}$ a rovinou $z=h$, $a,h>0$;

   (4) B ohraničeno shora sférou $r=4$ a zdola kuželem $\vartheta=\frac{\pi}{3}$ (popis ve sférických souřadnicích);

   (5) B v I. oktantu ohraničeno sférou $r=2$, souřadnicovými rovinami a mezi kužely $\vartheta=\frac{\pi}{6}$, $\vartheta=\frac{\pi}{3}$ (popis ve sférických souřadnicích);

   (6) B uvnitř sféry $x^2+y^2+z^2=9$, vně kužele $z=\sqrt{x^2+y^2}$ a nad rovinou xy;

   (7) B uvnitř kužele $\vartheta=\frac{\pi}{4}$ a mezi sférami $r=1$ a $r=2$ (popis ve sférických souřadnicích);

   (8) B ohraničeno sférou $x^2+y^2+z^2=4a^2$ a rovinami $z=0$, $z=a$, $a>0$;

   (9) B ohraničeno shora parabolickým válcem $z=4-y^2$ a zdola eliptickým paraboloidem $z=x^2+3y^2$.

3. Vypočítejte hmotnost a určete souřadnice těžiště T tělesa B s hustotou $h(x,y,z)$, je-li;

   (0) B ohraničeno válcovou plochou $x^2+y^2=1$, kuželovou plochou $z=\sqrt{x^2+y^2}$ a rovinou $yx, h(x,y,z)=z$;

   (1) B ohraničeno paraboloidem $z=1-x^2-y^2$ a rovinou xy, $h(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$;

   (2) B v I. oktantu ohraničeno válcovou plochou $x^2+y^2=a^2$, souřadnicovými rovinami a rovinou $z=a$, $a>0$, $h(x,y,z)=xyz$;

   (3) B polokoule ohraničená plochou $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ a rovinou $z=0$ a je-li hustota v daném bodě přímo úměrná vzdálenosti tohoto bodu od počátku;

(4) B ohraničeno shora sférou $x^2+y^2+z^2 = 2$ a zdola paraboloidem $z = x^2+y^2$, $h(x, y, z) = k$, $k > 0$;

Vypočítejte hmotnost tělesa B s hustotou $h(x, y, z)$, je-li:

(5) B mezi sférami $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ a $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $h(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2) - \frac{1}{2}$;

(6) B koule o poloměru $a > 0$ a je-li hustota v daném bodě přímo úměrná vzdálenosti bodu od středu koule;

(7) B mezi sférou $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ a kuželem $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $h(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;

(8) B v I. oktantu ohraničeno shora paraboloidem $z = 4 - x^2 - y^2$, zdola rovinou $z = 0$ a po stranách válcovou plochou $x^2 + y^2 = 2x$ a rovinami $x = 0$, $y = 0$, $h(x, y, z) = z$;

(9) B koule $r < 2b \cos\vartheta$, $h(r, \vartheta) = r \sin\vartheta$, $b > 0$ (popis ve sférických souřadnicích).

4. Vypočítejte obsah množiny A, je-li;

(0) A ohraničená lemniskátou $\varrho^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$, $a > 0$ (popis v polárních souřadnicích);

(1) A v I. kvadrantu, uvnitř kružnice $\varrho = 4 \sin\varphi$ a vně lemniskáty $\varrho^2 = 8 \cos 2\varphi$ (popis v polárních souřadnicích);

(2) A ohraničená kardioidou $\varrho = 1 - \cos\varphi$ (popis v polárních souřadnicích);

(3) A v I. kvadrantu ohraničená křivkami $\varrho = 2$ a $\varrho = \sin 2\varphi$ (popis v polárních souřadnicích);

(4) A uvnitř kružnice $x^2 + y^2 = 4$ a napravo od přímky $x = 1$;

(5) A uvnitř kružnice $\varrho = 1$ a vně kardioidy $\varrho = 1 + \cos\varphi$ (popis v polárních souřadnicích);

(6) A uvnitř kružnice $\varrho = 4 \sin\varphi$ a vně kruhu $\varrho = 2$ (popis v polárních souřadnicích);

(7) A ohraničená křivkami $x + y = 5$ a $xy = 6$;

(8) A ohraničená křivkami $y = x$ a $4y^3 = x^2$;

(9) A uvnitř kružnice $\varrho = 3 \cos\varphi$ a vně kružnice $\varrho = \cos\varphi$ (popis v polárních souřadnicích).