2. série úloh z Matematiky IIB

Pokyny k vypracování: Každému studentovi je přidělen kód skládající se ze 4 cifer, např. 0192. To znamená, že odevzdá (0) varianta 1. příkladu, (1) varianta 2. příkladu, (9) varianta 3. příkladu a (2) varianta 4. příkladu. Řešení příkladů pište na list papíru formátu A4, který označte jménem, číslem studijní skupiny a přiděleným kódem.
Hodnocení: za 1. a 3. příklad po 3 bodech, za 2. a 4. příklad po 2 bodech.

1. Vypočítejte hmotnost křivky $\mathcal{C}$:

   (0) $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$, $z(t) = 3t$, $t \in \langle 0,\, 2\pi \rangle$, je-li hustota v bodě $[x, y, z]$ křivky úměrná čtvrté mocnině jeho vzdálenosti od počátku souřadnic;

   (1) která vznikne průnikem sféry $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ a válcové plochy $x^2 + y^2 = Rx$, $(z > 0)$, je-li $h(x, y, z) = |y|$. (Uvažte, že $1 - \cos\varphi = 2\sin^2\frac{\varphi}{2}$, $1 + \cos^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}(3 + \cos\varphi)$.

   Vypočítejte délku křivky:

   (2) $x(t) = a\cos t$, $y(t) = a\sin t$, $z(t) = bt$, $t \in \langle 0,\, 2\pi \rangle$;

   (3) $x(t) = t$, $y(t) = \frac{2}{3}\sqrt{t^3}$, $z(t) = \frac{1}{2}t^2$, $t \in \langle 0,\, 2 \rangle$;

   (4) $x(t) = t$, $y(t) = \ln\frac{1}{\cos t}$, $z(t) = 3$, $t \in \langle 0,\, \frac{1}{4}\pi \rangle$;

   (5) $x(t) = \arctan t$, $y(t) = \frac{1}{2}\ln(1 + t^2)$, $t \in \langle 0,\, 1 \rangle$;

   (6) $x(t) = 2\cos t$, $y(t) = 2\sin t$, $z(t) = t^2$, $t \in \langle 0,\, 1 \rangle$;

   (7) $\boldsymbol{r}(t) = 3t\cos t\,\boldsymbol{i} + 3t\sin t\,\boldsymbol{j} + 4t\,\boldsymbol{k}$, $t \in \langle 0,\, 4 \rangle$.

   Vypočítejte křivkový integrál prvního druhu:

   (8) $\int_{\mathcal{C}}(y^2 - x^2)\,\mathrm{d}s$, $\mathcal{C}$: $x(t) = \mathrm{e}^{-t}$, $y(t) = \mathrm{e}^{t}$, $t \in \langle -1, 1 \rangle$;

   (9) $\int_{\mathcal{C}} x\,\mathrm{d}s$, $\mathcal{C}$: $x(t) = a(1 - \cos t)$, $y(t) = a(t - \sin t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

2. Vypočítejte pomocí Greenovy věty (všechny křivky jsou kladně orientovány):

   (0) $\oint_{\mathcal{C}}(3xy + y^2)\,\mathrm{d}x + (2xy + 5x^2)\,\mathrm{d}y$, $\mathcal{C}$: $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$;

   (1) $\oint_{\mathcal{C}}(2x^2 + xy - y^2)\,\mathrm{d}x + (3x^2 - xy + 2y^2)\,\mathrm{d}y$, $\mathcal{C}$: $(x-a)^2 + y^2 = r^2$;

   (2) $\oint_{\mathcal{C}}(x^2 - 2xy + 3y^2)\,\mathrm{d}x + (5x + 1)\,\mathrm{d}y$, $\mathcal{C}$: $x^2 + (y-b)^2 = r^2$;

   (3) $\oint_{\mathcal{C}}\mathrm{e}^x\cos y\,\mathrm{d}x + \mathrm{e}^x\sin y\,\mathrm{d}y$, $\mathcal{C}$ je obdélník s vrcholy $[0,0]$, $[1,0]$, $[1,\pi]$, $[0,\pi]$;

   (4) $\oint_{\mathcal{C}}(xy + 3y^2)\,\mathrm{d}x + (5xy + 2x^2)\,\mathrm{d}y$, $\mathcal{C}$: $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$;

   Vypočítejte:

   (5) $\int_{\mathcal{C}}(x + y)\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y$, $\mathcal{C}$ je elipsa o poloosách $a, b > 0$, kladně orientovaná;

   (6) $\int_{\mathcal{C}}\cos\pi y\,\mathrm{d}x - \pi x\sin\pi y\,\mathrm{d}y$, $\mathcal{C}$: $x(t) = t^2$, $y(t) = -t^3$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$;

   (7) $\int_{\mathcal{C}}(1 + \mathrm{e}^y)\,\mathrm{d}x + (x\,\mathrm{e}^y - x)\,\mathrm{d}y$, $\mathcal{C}$ je lomená čára $ABCD$, $A = [-1,-1]$, $B = [1,-1]$, $C = [1,1]$, $D = [-1,1]$;

   (8) $\int_{\mathcal{C}}(2xy - y^2)\,\mathrm{d}x + (x^2 + 2xy)\,\mathrm{d}y$, $\mathcal{C}$: $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$;

   (9) $\int_{\mathcal{C}}(2x\cosh y - y)\,\mathrm{d}x + (x^2\sinh y - y)\,\mathrm{d}y$, $\mathcal{C}$ je lomená čára $ABCD$, $A = [-1,-1]$, $B = [1,-1]$, $C = [1,1]$, $D = [-1,1]$.

3. (0) Nalezněte obsah části válcové plochy $y^2 + z^2 = 9$ nad čtvercem $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 2, -3 \leq y \leq 3\}$;

   (1) Pomocí plošného integrálu najděte obsah části roviny $2x + 2y + z = 8$ ležící v I. oktantu;

(2) Nalezněte obsah části kužele $z^2 = 4x^2 + 4y^2$, který leží nad oblastí v I. kvadrantu omezenou přímkou $y = x$ a parabolou $y = x^2$;

(3) Najděte obsah části kuželové plochy $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ležící uvnitř válce $x^2 + y^2 = 2x$;

(4) Najděte obsah plochy části paraboloidu $z = 1 - x^2 - y^2$ nad rovinou xy;

(5) Najděte obsah plochy $z = 2x + y^2$ nad trojúhelníkem v rovině xy o vrcholech $[0, 0]$, $[0, 1]$ a $[1, 1]$;

(6) Najděte obsah části plochy $z = xy$, která leží nad množinou v I. kvadrantu omezenou křivkami $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$, $y = 0$ a kružnicí $x^2 + y^2 = 9$;

(7) Určete obsah části paraboloidu $2z = x^2 + y^2$ ležícího uvnitř válce $x^2 + y^2 = 8$;

(8) Určete obsah části sféry $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ mezi rovinami $z = 1$ a $z = 2$;

(9) Najděte obsah části sféry $x^2 + y^2 + z^2 = 8$, která leží vně kužele $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

4. Vypočítejte následující plošné integrály:

(0) $\iint\limits_S \sqrt{1 + y^2}\, \mathrm{d}\sigma$, $S:\ z = \frac{1}{2}y^2,\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$;

(1) $\iint\limits_S \sqrt{2z}\, \mathrm{d}\sigma$, S jako v (0);

(2) $\iint\limits_S (x - y)\, \mathrm{d}\sigma$, S jako v (0);

(3) Vypočítejte moment setrvačnosti části kuželové plochy $z^2 = x^2 + y^2$ mezi rovinami $z = 1$ a $z = \mathrm{e}$ vzhledem k ose z, je-li hustota kuželové plochy v každém bodě nepřímo úměrná čtvrté mocnině vzdálenosti tohoto bodu od počátku $[0, 0, 0]$.

(4) Vypočítejte moment setrvačnosti sféry $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ vzhledem k ose z, je-li hustota sféry v každém bodě rovna čtverci vzdálenosti tohoto bodu od osy z.

(5) Vypočítejte hmotnost plochy $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ nad množinou $A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \le 4\}$, je-li hustota v každém bodě rovna vzdálenosti bodu od počátku souřadnic.

Vypočítejte hmotnost plochy trojúhelníka o vrcholech $[a, 0, 0]$ $[0, a, 0]$, $[0, 0, a]$, $a > 0$, je-li hustota dána vztahem:

(6) $\varrho(x, y, z) = k(x + y)$, $k > 0$;

(7) $\varrho(x, y, z) = kx^2$, $k > 0$;

(8) $\varrho(x, y, z) = kxy$, $k > 0$;

(9) $\varrho(x, y, z) = k(x^2 + y^2)$, $k > 0$.