3. série úloh z Matematiky IIB

Pokyny k vypracování: Každému studentovi je přidělen kód skládající se ze 4 cifer, např. 0192. To znamená, že odevzdá (0) varianta 1. příkladu, (1) varianta 2. příkladu, (9) varianta 3. příkladu a (2) varianta 4. příkladu. Řešení příkladů pište na list papíru formátu A4, který označte jménem, číslem studijní skupiny a přiděleným kódem.
Hodnocení: za 1. a 3. příklad po 3 bodech, za 2. a 4. příklad po 2 bodech.

1. Vypočítejte pomocí divergentní věty tok vektoru $\boldsymbol{v}$ uzavřenou plochou S (orientovanou vektorem vnější normály), tj. $\iint_S \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}$, je-li:

   (1) $\boldsymbol{v}(x,y,z) = (x^3, x^2y, x^2z)$, $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2 = a^2, 0 \le z \le b\}$, $a, b > 0$;

   (2) $\boldsymbol{v}(x,y,z) = (x+z, y+z, x+y)$, $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2+z^2 = 4\}$;

   (3) $\boldsymbol{v}(x,y,z) = (\sin x, y(2-\cos x), 0)$, S je povrch kvádru $0 \le x \le 3, 0 \le y \le 2, 0 \le z \le 1$;

   (4) $\boldsymbol{v}(x,y,z) = (0, y\cos^2 x + y^3, z(\sin^2 x - 3y^2))$, $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2+z^2 = 4\}$;

   (5) $\boldsymbol{v}(x,y,z) = (x, 2y^2, 3z^2)$, $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2 = 9, 0 \le z \le 1\}$.

   Vypočítejte pomocí Stokesovy věty $\iint_S \operatorname{rot}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}$, je-li:

   (5) $\boldsymbol{v}(x,y,z) = (z^2, 2x, -y^3)$, S je horní polovina jednotkové sféry $x^2+y^2+z^2 = 1$ $(z \ge 0)$ orientovaná vektorem normály $\boldsymbol{n} = (0,0,1)$ v bodě $(0,0,1)$;

   (6) $\boldsymbol{v}(x,y,z) = (6xz, -x^2, -3y^2)$, S jako v (5);

   (7) $\boldsymbol{v}(x,y,z) = (2z, -y, x)$, S je trojúhelník o vrcholech $[2,0,0]$, $[0,2,0]$, $[0,0,2]$ orientován vektorem normály $(1,1,1)$ v bodě $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$;

   (8) $\boldsymbol{v}(x,y,z) = (x^4, xy, z^4)$, S jako ve (7);

   (9) $\boldsymbol{v}(x,y,z) = (z^2+x^2, xy, x^2+y^2)$, S jako ve (7).

2. Nalezněte pomocí Laplaceovy transformace řešení Cauchyovy úlohy pro soustavu diferenciálních rovnic:

   (0) $x'' - 2y' + 2x = 0$, $3x' + 2y'' - 8y = 0$, $x(0+) = y'(0+) = 4$, $x'(0+) = y(0+) = 0$;

   (1) $x' = x - y + 2\sin t$, $y' = 2x - y$, $x(0+) = y(0+) = 0$;

   (2) $x' = y + 2\,\mathrm{e}^t$, $y' = x + t^2$, $x(0+) = 0$, $y(0+) = -1$;

   (3) $x' = 2x - 4y + 4\,\mathrm{e}^{-2t}$, $y' = 2x - 2y$, $x(0+) = y(0+) = 2$;

   (4) $x' = 2x + y$, $y' = 4y - x$, $x(0+) = 0$, $y(0+) = 1$;

   (5) $x' = x - 3y$, $y' = 3x + y$, $x(0+) = 1$, $y(0+) = 2$;

   (6) $x'' = 2y$, $y'' = -2x$, $x(0+) = 1$, $x'(0+) = y(0+) = y'(0+) = 0$;

   (7) $x' = x - y$, $y' = y - 4x$, $x(0+) = 2$, $y(0+) = 0$;

   (8) $x' = 2x + y$, $y' = x + 3y - z$, $z' = 2y + 3z - x$, $x(0+) = y(0+) = 2$, $z(0+) = 1$;

   (9) $x' = 2x - y - z$, $y' = 2x - y - 2z$, $z' = 2z - x + y$, $x(0+) = 0$, $y(0+) = 1$, $z(0+) = -2$.

3. Pomocí Laplaceovy transformace najděte řešení Cauchyovy úlohy:

   (0) $y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = \mathrm{e}^{-t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

   (1) $y''(t) + \omega^2 y(t) = \cos 2t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $\omega^2 \ne 4$;

   (2) $y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$;

   (3) $y''(t) - 2y'(t) - 2y(t) = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$;

(4) $y''(x) + 6y'(x) + 13y(x) = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 7$;

(5) $x'' + 4x = 2\cos^2 t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$;

(6) $x'' + 2x' + 3x = t\cos t$, $x(0) = -\frac{1}{4}$, $x'(0) = 0$;

(7) $x'' + 4x = 4\cos 2t - \frac{1}{2}\sin 2t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = \frac{1}{8}$;

(8) $x'' - x' - 6x = 6\,\mathrm{e}^{3t} + 2\,\mathrm{e}^{-2t}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = \frac{4}{5}$;

(9) $x'' + 9x = 18\cos 3t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 9$.

4. Určete Laplaceovu transformaci dané funkce (konečného impulsu), je-li:

(0) $f(t) = \frac{b}{a}t$ pro $t \in I = \langle 0, a)$, $f(t) = 0$ pro $t \in \mathbb{R} \setminus I$, $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$;

(1) $f(t) = \sin\frac{\pi t}{2a}$ pro $t \in I = \langle 0, a)$, $f(t) = 0$ pro $t \in \mathbb{R} \setminus I$, $a > 0$;

(2) $f(t) = -\cos t$ pro $t \in I = \langle \frac{\pi}{2}, \pi)$, $f(t) = 0$ pro $t \in \mathbb{R} \setminus I$;

(3) $f(t) = -\cos t$ pro $t \in I = \langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, $f(t) = 0$ pro $t \in \mathbb{R} \setminus I$.

Určete Laplaceovu transformaci dané periodické funkce f, je-li:

(4) $f(t) = |\cos t|$;

(5) $f(t) = (\cos t + |\cos t|)/2$.

Nalezněte řešení integrální, resp. integrodiferenciální, rovnice:

(6) $y - \int_0^t y(\tau)\,d\tau = \cosh t$;

(7) $y' + \int_0^t y(\tau)\,d\tau = 1$, $y(0+) = 1$;

(8) $y' - \int_0^t y(\tau)\,d\tau = 2$, $y(0+) = 0$;

(9) $y - 2\int_0^t y(\tau)\,d\tau = \cosh t$.