Písemná zkouška z Matematiky II B - 2. část

7. únor 2018

1. Najděte pomocí Laplaceovy transformace řešení Cauchyovy úlohy

$$y'' - 5y' + 6y = \begin{cases} t & 0 \le t < 1 \\ 1 & t \ge 1) \end{cases}$$

s počátečními podmínkami $y(0) = -1$, $y'(0) = 2$.

3 body

2. Určete objem tělesa mezi válci $x^2 + y^2 = ay$ a $x^2 + y^2 = 2ay$, omezeného shora kuželem $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ a zdola rovinou $z = 0$.

2 body

3. Vypočítejte hmotnost sféry $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $a > 0$, je-li hustota sféry v každém bodě rovna vzdálenosti tohoto bodu od roviny xy.

2 body

4. Nalezněte řešení Cauchyovy úlohy pro soustavu

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix} e^{-2t}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Rozhodněte, zda je každé řešení soustavy asymptoticky stabilní.
Poznámka. Matice soustavy má tyto (jediné) vlastní podprostory $\mathcal{L}_0\{(-1,1,0)\}$, $\mathcal{L}_1\{(-2,1,1)\}$, vlastní číslo $\lambda = 0$ je dvojnásobné.

3 body